DIXMIER　予想 まとめ

Weyl 環 $A_n(\Bbbk)$ をつぎで定義する。

$$A_n(\Bbbk) = \Bbbk\langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n / CCR\rangle$$

ただし、CCR は次のような関係式 (正準交換関係) である

$$[\eta_i, \xi_j] = \delta_{ij} \qquad (\text{クロネッカーのデルタ}),$$
$$[\eta_i, \eta_j] = 0, \quad [\xi_i, \xi_j] = 0$$

以下, $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n\}$ のことをまとめて $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}\}$ と書くこともある。

$$[\gamma_i, \gamma_j] = h_{ij}$$

ここで、(h_{ij}) は (簡単に計算可能な) 反対称行列である。

0.1. 基本表現 Φ と Φ_0.

定義 0.1. $A_n(\Bbbk)$ の $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ 上の表現 Φ を

$$\Phi(\xi_i).f = x_i f, \qquad (f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$$
$$\Phi(\eta_i).f = \partial/\partial x_i.f \qquad (f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$$

で定義する。

命題 0.1. $\mathrm{char}(\Bbbk) = p > 0$ のとき、Φ は $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^p, \ldots, x_n^p)$ 上の剰余表現 Φ_0 を定義する。Φ_0 は剰余環 $A_n/(\gamma_1^p, \ldots, \gamma_{2n}^p)$ と全行列環 $M_{p^n}(\Bbbk)$ との $\Bbbk$-環同型を与える。

系 0.2. $\Bbbk\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}\rangle / CCRp \cong M_{p^n}(\Bbbk)$. ただし、

$$CCRp = (CCR) \cup \{\gamma_1^p, \ldots, \gamma_{2n}^p\}$$

1. 予想

予想 1.1. *標数 0 の体 $\Bbbk$ 上の Weyl 環 $A(\Bbbk)$ の 環自己準同型は必ず全単射である。*

2. よく知られた事実

以下、$\mathrm{char}(\mathbb{k}) = p > 0$ とする。

命題 2.1. $A_n(\mathbb{k})$ は $M_p(\mathbb{A}^{2n}(\mathbb{k}))$ に埋め込める。

定理 2.2. $\varphi : A(\mathbb{k}) \to A(\mathbb{k})$ が環自己準同型であれば、$\exists g(t) \in GL_p(\mathbb{k}[t]), \exists \alpha : \mathbb{A}^{2n} \to \mathbb{A}^{2n}$ *such that*

$$\varphi(a)(t) = g(t)a(\alpha(t))g(t)^{-1}.$$

命題 2.3. $\mathrm{Deg}(g_0\gamma_i g_0^{-1}) < p/2 (i = 1, 2, \ldots, 2n)$ とする。($\mathrm{Deg}\,\bullet$ は $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}\}$ に関する次数). このとき

$$\gamma_i \mapsto g_0\gamma_i g_0^{-1}$$

は $A_n(\mathbb{k})$ の環自己準同型に拡張可能である。

$$g_0[\gamma_i\gamma_j]g_0^{-1} - h_{ij}$$

は CCRp で生成される ideal の元だが、次数の関係から、 0 以外にはありえない。

3. Statements

定理 3.1 (A)**.** $g_0\gamma_i g_0^{-1} = a_i(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n})(i = 1, \ldots 2n$ と書けたとする。$l\,\mathrm{Deg}(a) + k < n(p-1)$ を仮定する。このとき $\mathrm{Deg}(F) = l, \mathrm{Deg}(G) = k$ をみたす 任意の多項式 F, G に対して、

$$\mathrm{tr}(F(g_0\mu g_0^{-1})G(\mu)) = 0$$

がなりたつ。

定理 3.2 (B)**.** $g_0^{-1}\gamma_i g_0 = b_i(\gamma_1, \ldots \gamma_{2n}) \quad (i = 1, \ldots, 2n)$ と書けたとする。$l + (\mathrm{Deg}(b))k > 2np$ ならば、

$$\exists F, \exists G \textit{ such that } \mathrm{Deg}(F) = l, \mathrm{Deg}(G) = k, \mathrm{tr}(F(\mu)G(g_0^{-1}\mu g_0)) \neq 0$$

generic な多項式の係数を見る。