非可換ケーラー多様体としての
非可換射影多様体の様子について

土基 善文

2015/3/22(日) 10:20-10:35

今回言いたいこと (前半)

自然にケーラー構造を持つ多様体は非可換多様体の影である。
実際...

今回言いたいこと (前半)

自然にケーラー構造を持つ多様体は非可換多様体の影である。
実際...

Proposition

射影代数多様体には非可換多様体が付随する。

影とは

素数全体の集合 P の ultra filter の理論

$\Longrightarrow$

$p >> 0$ での標数 p の代数幾何学は 標数 0 のものと同じ。

今後したいこと

- 標数 p (フロベニウスを持つ) と標数 0 (複素共役をもつ) の行き来。
- $H^{k,l}$ と $H^{l,k}$ の対称性。
- 合同ゼータの計算
- 具体例の計算

「影」の例

$\mathbb{C}^n$ にシンプレクティック形式を

$$dX_1 d\overline{X_1} + dX_2 d\overline{X_2} + dX_3 d\overline{X_3} + \cdots + dX_n d\overline{X_n}$$

で入れたものには

$$A_n(\Bbbk) = \Bbbk\langle X_1, \ldots X_n, \overline{X_1}, \ldots \overline{X_n}\rangle / CCR$$

が対応する。
CCR:

$$[X_i, X_j] = 0, \quad [\bar{X}_i, \bar{X}_j] = 0, \quad [\bar{X}_i, X_j] = \delta_{ij}.$$

射影空間

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) &= (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times \\ &\cong (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})//S^1\end{aligned}$$

symplectic quotient

$$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}//S^1 = \mu^{-1}(0)/S^1 \cong S^{2n+1}/S^1$$

射影空間の非可換バージョン

$$\mathbb{C}^{n+1}/S^1 \supset \mu_R^{-1}(0) = S^{2n+1}/S^1$$

$$\mathbb{C}^{n+1} \leftrightarrow A = A_{n+1}(\Bbbk) = \Bbbk\langle X_0, X_1, \ldots X_n, \overline{X_0}, \ldots, \overline{X_n}\rangle / CCR$$

$$\mu_R = X_0\overline{X_0} + \cdots + X_n\overline{X}_n - R$$

$J = A_{n+1}(\Bbbk)\mu_R$

$$A//J = \mathbb{I}_A(J)/J \cong \mathrm{End}_{A\text{-}}(A/J)$$

Spec$(A//J)$ が $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の非可換バージョンである。ただし、この構成は標数 0 で考える。(標数 p のものは標数 0 で構成してから mod p する。)

$$A//J = (A_{n+1}(\Bbbk))_0/(A_{n+1}(\Bbbk))_0\mu_R$$

A_{n+1} の gradation:

$$\mathrm{sdeg}(X_i) = 1, \mathrm{sdeg}(\bar{X}_i) = -1.$$

$$(A_{n+1}(\Bbbk))_0 = \Bbbk[\{X_i\bar{X}_j\}_{i,j=0}^{n+1}]$$

$$\mu_R = X_0\overline{X_0} + \cdots + X_n\overline{X}_n - R$$

検索してね

Spec$(A//J)$ は完備ではない。
完備化して shadow がちょうど $\mathbb{P}^n \times \overline{\mathbb{P}^n}$ のものができる。
$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ を影に持つ非可換多様体の詳しい構成はアブストラクトにあります。
もしくは、google で検索してね。

一般の射影多様体に対しては

射影代数多様体 V の斉次定義イデアル I をとる。
$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の algebra の sheaf $\mathcal{A}$ の剰余代数の層として

$$\mathcal{A}/\mathcal{A} \cdot (I^p + \bar{I}^p)$$

を考える...

一般の射影多様体に対しては

射影代数多様体 V の斉次定義イデアル I をとる。
$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の algebra の sheaf $\mathcal{A}$ の剰余代数の層として

$$\mathcal{A}/\mathcal{A} \cdot (I^p + \overline{I}^p)$$

を考える...

Proposition

すべての射影代数多様体に対して、上記のような方法で非可換な対象を作ることができる。

問題...

一般の射影多様体に対しては

射影代数多様体 V の斉次定義イデアル I をとる。
$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の algebra の sheaf $\mathcal{A}$ の剰余代数の層として

$$\mathcal{A}/\mathcal{A} \cdot (I^p + \bar{I}^p)$$

を考える...

Proposition

すべての射影代数多様体に対して、上記のような方法で非可換な対象を作ることができる。

問題...

問題

一つ一つの具体的な代数多様体に対し、上記対象を解析せよ。

「微分形式」の導入。