"NON COMMUTATIVE ALGEBRAIC SPACE OF FINITE ARITHMETIC TYPE" について

土基 善文 (高知大学 理学部)

1. Introduction

非可換な環を、(可換環がスキーム論によってあたかも目に見えるかのように扱えるように) 目に見えるように扱いたい。

一言で非可換環と言ってもいろいろな種類がある。標準的で重要に思えて、なおかつ対極にあると思われるのは

(1) 非可換自由多項式
(2) 微分のなす環のような、単純環

だろう。前者はイデアルが山のようにあって、大きい環であり、そのかわりに universality で可換環論における多項式環のような基本的な役割を果たす。重要な環である。

しかし今回は後者を取り上げたい。このような環も前者の剰余環としていずれは出てくるわけだし、応用も広いからである。

単純環においては $\mathbb{C}$ や他の小さい環への環準同型がない (不確定性原理)。位相をいれて近似をするのを許せば、これは「近似的に準同型」などの道具が使えそうだが、代数的に攻めるにはどうするだろうか。代数体の整数環 $\mathfrak{O}$ の、ある元 f による局所化 $R = \mathfrak{O}_f$ の上で定義されるような非可換代数にたいして、

(1) 一旦正標数に話を持っていく。
(2) ultra filter で標数 0 の世界に戻ってくる。

というアプローチで迫るというやりかたはかなり有力であると思われる。ここではこれを紹介したい。

このような流れから言えば、(1) から話しはじめるのが筋であるが、原稿を書きはじめると (1) の部分 (とくに、例) が長くなってしまったので、まず (2) からはじめる。(2 節)

そのあと、一般論を展開し (3 節)、最後に例をあげて一般論が具体的にはどういう意味をもつかについて説明する。

2. ultra filter による極限

Definition 2.1. 集合 X の部分集合の族 $\mathfrak{F}$ は次の条件を満たすとき filter と呼ばれる。

(1) $\mathfrak{F} \ni A, B \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \in \mathfrak{F}$.
(2) $\mathfrak{F} \ni A, \quad A \subset A_1 \subset X \quad \Longrightarrow \quad A_1 \subset \mathfrak{F}$.

極大な filter のことを ultra filter と呼ぶ。

Ultra filter については次のことが基本的である。

LEMMA 2.2. $\mathcal{U}$ が集合 X の *ultra filter* ならば次のことが言える。

(1) $X = X_1 \cup X_2$ なら、 X_1 か X_2 のいずれか一方は $\mathcal{U}$ の元である。
(2) $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \ldots X_N$ なら、 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ のどれか一つは $\mathcal{U}$ の元である。
(3) 上で、さらに和集合が *disjoint union* ならば、$\mathcal{U}$ の元になる X_j は唯一つのみである。

証明はとてもやさしいので、ここでは省略しよう。上の補題は $\mathcal{U}$ が「選択規則」を与えることをいっている。その意味はあとで少し解説する。

DEFINITION 2.3. X の ultra filter $\mathcal{U}$ が principal ultra filter であるとは、ある $x \in X$ があって、

$$\mathcal{U} = \{U \subset X; x \in U\}$$

を満たすときに言う。

principal filter は確かに ultra filter ではあるが、これを考えるならば最初から X の点 x を考えればすむのである。(Bourbaki は数学原論で principal filter のことを "trivial filter" と呼んでいるが、その気持ちはよくわかる。)
上の Lemma の (3) から、 つぎのことがすぐわかる。

LEMMA 2.4. 集合 X の *ultra filter* $\mathcal{U}$ の元 E で、有限集合であるようなものが存在すれば、$\mathcal{U}$ は *principal filter* である。

以下では non-principal ultra filter をおもに考えることになる。

2.1. 余談:**Ultra filter** の言い換え**.** ultra filter の議論は不慣れだが、代数幾何は得意な方には、次のような言い換えはいかがだろうか。

LEMMA 2.5. 集合 X に離散位相を入れて位相空間と考え、その上の複素数値有界関数全体を $C_b(X)$ とかくことにする。$C_b(X)$ には各点での演算で環 *(C^*-環)* の構造が入る。さらに、$C_b(X)$ の極大イデアル全体 $Y = \mathrm{Spm}(C_b(X))$ には、$C_b(X)$ の各元を連続にするような最弱な位相を入れておく。このとき、次の *5* つのものは同等である。

(1) Y の点 *(*すなわち、$C_b(X)$ の極大イデアル*)*
(2) $C_b(X)$ から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{C}$-代数としての準同型 φ
(3) $C_b(X)$ から $\mathbb{C}$ への $*$-環準同型
(4) X の最大コンパクト化 *(Stone-Čech* コンパクト化*)* の点
(5) X の *ultra filter*

こう言い換えてみると ultra filter は X の最大コンパクト化の元で、principal ultra filter はそのうち X のもともとの元。 non-principal ultra filter のほうは X の "理想境界" の元であると見ることができて、若干見やすく感じられると思うのだが、いかがだろう。
上の補題の証明は本題とは全く関係ないのだが、適当な参考文献が見当たらないので一応つけておこう。(この補題が知られていないと言う意味ではない。それどころかいまでは wikipedia (誰でも書き込める web 上の百科事典。URL は `http://en.wikipedia.org/wiki/`

) にも本質的な部分は載っているぐらいに有名である。) とくに興味がある方を除いては次の小節までスキップすることをお勧めする。

Proof. (2) のデータ φ から (1) を作るのは φ の核を考えればよい。(代数幾何の方には説明を要しないであろう。)

$C_b(X)$ は可換 C^*-代数 (とくに Banach 環) であり、その極大イデアル $\mathfrak{M}$ は 必ず閉じている ($\mathfrak{M}$ の閉包も $C_b(X)$ のイデアルであるから。)。とくに、$C_b(X)/\mathfrak{M}$ は Banach 環で、かつ、体である。そのようなものは $\mathbb{C}$ しかない。(Gelfand-Mazur の定理。代数幾何における 零点定理の C^*-代数版と言っても (言っている人は見たことがないが、) よかろう。) ゆえに、(3) のデータが得られる。このことから (1)-(3) の同等性は明白だろう。

(4) と (1) の同等性を示そう。X からコンパクトハウスドルフ集合 K への連続写像 ϕ が与えられているとする。K 上の複素数値連続関数全体のなす環 $C(K)$ から任意に f をとると、f は (コンパクト集合上の連続関数であるから) 有界で、その ϕ による引き戻し $\phi^*(f)$ も当然有界である。したがって、

$$\phi^* : C(K) \to C_b(X)$$

なる $*$-環準同型が定まることがわかる。C^*-環の世界ではよく知られているように $C(K)$ の極大イデアル全体は K と同一視できる (Stone-Weierstass の定理: コンパクトハウスドルフ集合は C^*-環の世界ではアファインなのだ。) ので、

$$Y = \mathrm{Spm}(C_b(X)) \to K$$

なる連続写像が定まる。このことは Y が「普遍性」を持つことを示しており、Y が「最大コンパクト化」であることが知れる。

(5) のデータ、すなわち X の ultra filter $\mathcal{U}$ から (3) のデータを作ろう。$C_b(X)$ の元 f を任意にとる。f に対してその 「$\mathcal{U}$ での値」(極限) を定める必要があるわけだが、それには「区間縮小法」を用いる。f は有界であるから、ある $K > 0$ があって、

$$f(X) \in D_K = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq K\}$$

が言える。D_K は半径 K の複素円盤である。いま、任意の $\epsilon > 0$ にたいして、D_K を直径 ϵ 以下の集合有限個 $B_1, \ldots, B_N$ の和でもって、

$$D_K = B_1 \cup B_2 \cup \ldots B_N$$

と覆うと、

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} f^{-1}(B_j) \qquad \text{disjoint union}$$

となり、ultra filter の性質から、ある j があって、

$$f^{-1}(B_j) \in \mathcal{U}$$

がわかる。この j にたいして $f^{-1}(B_j)$ のことを U と書くと、$U \in \mathcal{U}$ で、なおかつ $f(U)$ の直径は ϵ 以下、すなわち、$f(\mathcal{U})$ は「コーシーフィルター」であることがわかる。 $\mathbb{C}$ は

もちろん完備距離空間であるから、$f(\mathcal{U})$ は一つ (唯一つ) の元 $c_f \in \mathbb{C}$ に収束する。

$$f \mapsto c_f$$

が求める $*$-環準同型である。 □

2.2. 大事な体の定義. さて本題に戻ろう。素数 p に対して有限体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ のことを $\mathbb{F}_p$ と書き、その代数拡大体で、位数 p^r のものを $\mathbb{F}_{p^r}$、$\mathbb{F}_p$ の代数的閉包 $\operatorname{inj}\lim_r \mathbb{F}_{p^r}$ を $\mathbb{F}_{p^\infty}$ と書くことにする。

DEFINITION 2.6. $P = \operatorname{Spm}(\mathbb{Z})$ ($\mathbb{Z}$ の極大イデアルの全体の集合。素数全体の集合と言っても同じ) の non-principal Ultra filter $\mathcal{U}$ を一つ固定する毎に、次のような環を考えることができる。

$$\mathbb{Q}_{\mathcal{U}} = \prod_p \mathbb{F}_p/(\mathcal{U} \text{ で } 0)$$

$$\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)} = \prod_p \mathbb{F}_{p^\infty}/(\mathcal{U} \text{ で } 0)$$

上の定義はちょっとずぼらすぎるだろうか。$\prod_p \mathbb{F}_p$ の元とは、 列

$$(a_p)_{p\in P} \qquad (a_p \in \mathbb{F}_p)$$

のことであり、それらの全体 $\prod_p \mathbb{F}_p$ は成分ごとの演算により可換環をなす。"$(\mathcal{U}$ で $0)$" でこの環を割るというのは、環 $\prod_p \mathbb{F}_p$ の次のようなイデアル $I_{\mathcal{U}}$ による剰余環を考えて、それを $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}$ と呼ぼう、ということである。

$$I_{\mathcal{U}} = \{(a_p)_{p\in P} \in \prod_p \mathbb{F}_p; \exists U \text{ such that } a_p = 0 \text{ for all } p \in U\}$$

$\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)}$ のほうも同様。

PROPOSITION 2.7. 次のことが成り立つ。

(1) $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)}, \mathbb{Q}_{\mathcal{U}}$ はともに標数 0 の体である。
(2) $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)}$ は代数閉体である。

PROOF. (1) はアタリマエに近いのであるが、某所でわからないという意見を頂いたので一応証明をつけておこう。この部分は $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}, \mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)}$ どちらでも同様なので $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}$ のほうだけ証明する。

まず体であることから。

$f = (f_{\mathfrak{p}})$ が $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}$ の 0 でない元 (の代表元) であるとする。

$$E_1 = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}_1(\mathfrak{O}); f_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$$

とおくと、任意の $E \in \mathcal{U}$ に対して、共通部分 $E \cap E_1$ は空ではない。(そうでなければ $f = 0$ となる。) したがって、($\mathcal{U}$ の極大性により) E_1 自身も $\mathcal{U}$ の元である。f の逆元

$g=(g_{\mathfrak{p}})$ は次のように与えられる。

$$g_{\mathfrak{p}}=\begin{cases} f^{-1} & \text{if } \mathfrak{p}\in E_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

次に $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}$ の標数が 0 であることを示そう。もしある整数 n にたいして、 $n=0$ が $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}$ で成り立つなら、ある $E_0\in\mathcal{U}$ が存在して、

$$n\in\bigcap_{p\in E_0} p\mathbb{Z}$$

が成り立つ。いきおい E_0 は有限集合になってしまって、$\mathcal{U}$ の極大性により $\mathcal{U}$ は principal ultra filter にならざるを得ない。これは仮定に反する。

つぎに、$\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)}$ が代数的閉体であることを示そう。これも $\mathbb{F}_{p^\infty}$ が閉体であるから、と言ってしまえばそれでおしまいで、そこで納得するほうが精神衛生上よいかもしれないのであるが、もう少し丁寧に書いておこう。あとの議論がわかりやすくなるかも知れないからである。

$\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)}$ の上のモニックな一変数多項式

$$F(X)=X^n+a^{(n-1)}X^{n-1}+a^{(n-2)}X^{n-2}+\cdots+a^{(1)}X+a^{(0)}$$

$(a^{(j)}\in\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)})$ を考えよう。問題はこの多項式が $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)}$ の中に根を持つことを示すことである。

$$a^{(j)}=(a_p^{(j)})_p \qquad a_p^{(j)}\in\mathbb{F}_{p^\infty}$$

と書いてみると、各素数 p ごとに $\mathbb{F}_{p^\infty}$ 上の多項式

$$F_p(X)=X^n+a_p^{(n-1)}X^{n-1}+a_p^{(n-2)}X^{n-2}+\cdots+a_p^{(1)}X+a_p^{(0)}$$

が与えられていることになる。$\mathbb{F}_{p^\infty}$ は代数的閉体であるから、そのなかに F_p の根 $x_p^{(1)},x_p^{(2)},\ldots,x_p^{(n)}$ が存在する。

$$(*) \qquad x^{(j)}=(x^{(j)})_p\in\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)} \qquad (j=1,\ldots,n)$$

とおけば、x は F の $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)}$ のなかの一つの根を与える。

上で証明は終りであるが、あわてて一つ補足しておこう。上の証明で、$\{x_p^{(i)}\}_{i=1}^n$ の順番の付け方は $n!$ とおりあって、それらを p ごとに変えると $F(X)$ の根がものすごくたくさん得られるような気がして、妙な気分に陥る方がいるかも知れない。確かに、素数 p ごとに置換 $\sigma_p\in\mathfrak{S}_n$ を勝手に選んで、

$$x^{(\sigma)}=(x^{(\sigma_p(1))})_p\in\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)}$$

を考えれば、それは F の根になる。が、置換群 $\mathfrak{S}_n$ の元 τ にたいして、

$$U_\tau=\{p\in\mathrm{Spm}(\mathbb{Z});\sigma_p=\tau\}$$

とおくと、

$$\mathrm{Spm}(\mathbb{Z}) = \cup_{\tau\in\mathfrak{S}_n} U_\tau \qquad \text{disjoint union}$$

となって、 ultra filter の性質により、どれか唯一つの U_τ のみが $\mathcal{U}$ に属する。すなわち、p が U の元なら、σ_p はすべて τ に等しいのであって、したがって、$x^{(\sigma)}$ は必然的に $(*)$ のなかの一つ $x^{(\tau(1))}$ に等しくなる。

このことは、ultra filter の「選択規則」という側面をよく表しているように思える。有限個の選択肢 ($\mathfrak{S}_n$ の元) のうち、$\mathcal{U}$ の「極限」では必ずただ一つの選択肢が選ばれているわけである。

□

つぎの命題は直接今回使用しないが、大変興味深いと思われるのでここに書いておく。

Proposition 2.8. *ultra filter* $\mathcal{U}$ をうまく選ぶと、$\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}$ は $\mathbb{Q}$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ を含むようにできる。

この証明に当たっては大阪女子大 (当時) の吉冨健太郎先生と議論したりいろいろ教えて頂いたりした。キモは次の二つの Lemma である。

Lemma 2.9. 任意の $f \in \mathbb{Z}[X]\setminus\mathbb{Z}$ にたいし、f *modulo* p が $\mathbb{F}_p$ に根をもつような素数 p が無限個存在する。

Proof. $f \in \mathbb{Z}[X]\setminus\mathbb{Z}$ で、f modulo p が $\mathbb{F}_p$ に根をもつような素数 p が有限個 $p_1, p_2, \ldots, p_N$ しかないものがあったとする。$f(x)$ を少しずらし $f(x+c)$ を考えて、さらに必要なら f を $-f$ で置き換えることにより、$x > 0$ ならば $f(x) > 0$ と仮定して差し支えない。仮定により、

$$\{f(j); j = 1, 2, 3, \ldots,\} \subset \{p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_N^{e_N}; e_1, e_2, \ldots, e_N \in \mathbb{N}\}$$

である。ところが、

$$\#(\{p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_N^{e_N}; e_1, e_2, \ldots, e_N \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N}_{\leq 2^m}) \leq \#\{e_1, e_2, \ldots, e_N \in \mathbb{N}_{\leq m}\} = m^N$$

他方で

$$\#(\{f(j); j = 1, 2, 3, \ldots,\} \cap \mathbb{N}_{\leq 2^m}) \sim 2^{m/d}$$

(d は f の次数)

これは矛盾である。

□

Lemma 2.10. 任意有限個の $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbb{Z}[X]\setminus\mathbb{Z}$ に対して、そのいづれもが $\mathbb{F}_p$ 上で一次式の積に分解するような素数 p は無限個ある。

Proof. $\mathbb{Q}$ に $f_1, f_2, \ldots, f_n$ の全ての根たち $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ を付け加えた体 K を考えて、K のガロア閉包を L とおく。L は $\mathbb{Q}$ の単拡大になる (標数 0 の有限次拡大だから) ことに注意して、L を $\mathbb{Q}$ 上生成するような元 β をとる。

β の $\mathbb{Q}$ 上の定義方程式についてさきの Lemma を適用すればよい。 □

(Proposition 2.8 の証明) $\mathbb{Z}$ 上の一次以上の monic な多項式の有限個の集合の全体を $\mathcal{S}$ とする。$S = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \in \mathcal{S}$ にたいして、

$$U_S = \{p \in \mathrm{Spm}(\mathbb{Z}); f_1, f_2, \ldots, f_n \text{ は } \mathbb{F}_p \text{ で 一次式の積に分解する }\}$$

とおく。上の補題から U_S は空ではなく、なおかつ、任意の $S, T \in \mathcal{S}$ に対して、

$$U_S \cap U_T = U_{S \cup T} \neq \emptyset$$

であるから、

$$\mathcal{U}_0 = \{U \subset \mathrm{Spm}(\mathbb{Z}); \exists S \in S \text{ such that } U \supset U_S\}$$

とおくと、$\mathcal{U}_0$ は filter である。(フィルターの言葉で言えば、$\mathcal{U}_0$ は filter base $\{U_S; S \in \mathcal{S}\}$ から生成されたフィルターである。) $\mathcal{U}_0$ を含む ultra filter の一つ (必ず存在する) を $\mathcal{U}$ とおけば、 $\mathcal{U}$ が non principal であることはすぐにわかる。しかも、$\mathcal{U}$ の選び方により $\mathbb{Z}$ 上の任意のモニックな多項式は $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}$ 上で一次式の積に分解することがわかる。 □

LEMMA 2.11. $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)}$ および $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}$ の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度と同じである。.

PROOF. $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)}$ は可算集合 $\mathbb{F}_{q^\infty}$ の可算個の積の剰余集合であるから、

$$\#\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)} \leq \#\mathbb{R}$$

であることがわかる。$\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)}$ は $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}$ を部分体として含むから、$\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}$ の濃度が連続体濃度以上であることを示せば十分である。次のような全射 $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}} \to S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ をつくろう。まず、$\iota_p : \mathbb{F}_p \to S^1$ を、

$$\iota_p : \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \ni (n \mod \mathbb{Z}) \to (n/p \mod \mathbb{Z}) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

で定義する。これはもちろん well-defined な写像である。そして π を

$$\pi(\pi_{\mathcal{U}}((a_p))) = \lim_{p \overrightarrow{\mathcal{U}} \infty} \iota_p(a_p)$$

で定義する。右辺の limit は filter の普通の意味の limit である。ultra filter の議論と、区間縮小法を用いると、右辺が必ず収束することがわかる。(Lemma 2.2 の証明のところと同じ議論である。) さらに、S^1 の任意の元 α に対して、$a_p \in \mathbb{F}_p$ を、$\iota_p(a_p)$ が α に最も近付くように選べば、$\pi((a_p)) = \alpha$ がわかる。すなわち π は全射である。 □

上の命題の系として、 $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)}$ の正体が明らかになる。

COROLLARY 2.12. 体として $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}^{(\infty)} \cong \mathbb{C}$.

PROOF. 両者とも濃度が連続体濃度に等しい標数 0 の代数的閉体だからである。(transcendense base をとって対応させ、閉体であることを使って対応を同型に拡張すればよい。) □

ようするに、(ultra filter $\mathcal{U}$ と上の系のような同型を一つ固定した上で、) $\mathbb{F}_{p^\infty}$ の元を各 p について用意すれば、それで $\mathbb{C}$ の元が定まると言うわけである。これはもちろん一つの元だけではなくて、

- 変数の数と、次数が p によらずに押えられた多項式 f_p
- 貼り合わせの変換関数が、「p によらない」代数多様体

などにも応用できる。(これは定理と言うよりは原理だが、誰の原理と言うんだろう？)

扱う問題によっては、命題 2.8 を援用して $\mathbb{F}_p$ で話が済むこともあるだろう。

これが今回の話で「limit を ultra filter でとる」ということの意味である。

3. "NON COMMUTATIVE ALGEBRAIC SPACE OF FINITE ARITHMETIC TYPE" の定義

標題のものの定義をしよう。カッコつきなのはこの定義が私が勝手に作ったものであるということと、まだ見直す点があることによる。

「非可換空間」は abel 圏で作ることにする。これは A. Rosenberg が [5] などで言っていることで、遡れば Grothendieck がそのようなことを述べているらしい。abel 圏 $\mathcal{C}$ を、あたかもある「空間」上の準連接層のなす abel 圏であるかのように扱おうということである。例えば、通常のスキームはその上の準連接層のなす abel 圏のデータから復元できることが Rosenberg らの研究により知られている。

ここではそれほど深刻なことを言うつもりではなく、とりあえず「入れ物」として abel 圏を確保して、それから内装を充実させることにする。

3.1. R-線型 abel 圏.

まず次のような概念を補助的に導入しよう。(だれでも考えそうな概念であるが、はじめ筆者には文献が見当たらなかったので、"R-abel 圏" と呼んでいた。後に実は R-線型 abel 圏として知られていることがわかった。ただ未だに出典がはっきりしない。)

DEFINITION 3.1. 可換環 R に対して、 abel 圏 $\mathcal{C}$ が R-線型 abel 圏であるとは、$\mathcal{C}$ につぎのような構造が付加されているときに言う。

(1) 任意の $M_1, M_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ にたいし、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_1, M_2)$ は R-加群の構造を持つ。
(2) R-加群の構造は射の合成と協調的である。すなわち、

$$(a.f) \circ g = a.(f \circ g) = f \circ (a.g)$$

が任意の $a \in R$ と $\mathcal{C}$ の (合成可能な) f, g について成り立つ。

R-線型 abel 圏から R-線型 abel 圏への R-線型函手とは、普通の意味の (additive な) 函手であって、R-加群の構造を保つものをいう。

R-加群の全体 $(R-\mathrm{module})$ はもちろん R-線型 abel 圏である。さらに、R-線型 abel 圏 $\mathcal{C}$ が augmented であるというのを、$(R-\mathrm{module})$ から $\mathcal{C}$ への R-共変函手が与えられているときにいうことにする。(これは筆者が付け加えた定義である。)

DEFINITION 3.2. $\mathcal{C}$ は可換環 R 上の R-線型 abel 圏であるとする。R のイデアル I に対して、 R/I-線型 abel 圏 $\mathcal{C}/I$ を、次のような $\mathcal{C}$ の充満部分圏として定義する。

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}/I) = \{M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}); IM = 0\}.$$

($IM = 0$ は実際には圏論的に、「任意の $a \in I$ に対して

$$M \overset{\times a}{\to} M$$

が 0 と一致する」と解すべきである。)

DEFINITION 3.3. k は標数 $p \neq 0$ の体であるとする。「little non commutative algebraic space of finite type (LNCAS) over k」とは、次のデータをいう。

(1) 通常の意味の代数空間 X で、k 上 finite type なもの。
(2) X 上の代数層 $\mathcal{A}$ であって、$\mathcal{A}$ は $\mathcal{O}_X$-加群として $\mathcal{O}_X$-連接的なもの。

これらのデータを、$(X, \mathcal{A})$ とかく。さらに、$\mathcal{C}_{\mathrm{qcoh}}(X, \mathcal{A})$ で、$\mathcal{A}$-加群で、$\emptyset_X$-準連接的であるようなもの全体のなす augmented k-線型 abel 圏を表すことにする。

DEFINITION 3.4. R は、代数体 $\mathfrak{K}$ の整数環 $\mathfrak{O}$ の有限局所化であるとする。"non commutative algebraic space of finite arithmetic type" X (over R) とは、つぎのデータを言う。

(1) R-線型 abel 圏。これを (象徴的に) $\mathcal{C}_{\mathrm{qcoh}}(X)$ とかく。
(2) 各極大イデアル $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spm}(\mathfrak{O})$ に対して、ある little non commutative algebraic space of finite type $(X_{(\mathfrak{p})}, \mathcal{A}_{X(\mathfrak{p})})$ over $R/\mathfrak{p}$
(3) 各 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spm}(\mathfrak{O})$ に対して、同型 $\mathcal{C}_{\mathrm{coh}}/\mathfrak{p} \cong \mathcal{C}_{\mathrm{qcoh}}(X_{(\mathfrak{p})}, \mathcal{A}_{X(\mathfrak{p})})$

さすがに "non commutative algebraic space of finite arithmetic type" という語は長すぎるので、以下では pre NCAS と呼ぶことにする。("finite arithmetic type" のところが訳されていないが、これはこの文では常に仮定するので省いていると思って頂きたい。)

R 上の pre NCAS のあいだの morphism は、これらのデータと可換になるようなものとして定める。もっと具体的にいうと、次のようになる (little NC 代数空間の射は、想像がつくだろう (スキームの射の定義を思い浮かべればよいだろう。) からここでは省略する。)

DEFINITION 3.5. R は、代数体 $\mathfrak{K}$ の整数環 $\mathfrak{O}$ の有限局所化であるとする。X, Y が R 上の pre NCAS であるとき、X から Y への morphism とはデータ

(1) $\mathcal{C}_{\mathrm{qcoh}}(Y)$ から $\mathcal{C}_{\mathrm{qcoh}}(X)$ への共変函手 ("引き戻し").
(2) 各 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spm}(\mathfrak{O})$ に対して、$(X_{(\mathfrak{p})}, \mathcal{A}_{X(\mathfrak{p})})$ から $(Y_{(\mathfrak{p}), A_{Y(\mathfrak{p})}})$ への LNCAS としての射 $f_{(\mathfrak{p})}$.

であって、引き戻しと modulo $\mathfrak{p}$ が各 $\mathfrak{p}$ について可換なものをいう。

以上の定義は例を見てはじめて真価がわかる。

可換なものが付随しているので、pre NCAS が「localization, étale, smooth」などの定義がかなり想像しやすい。

例えば、X が smooth であるとは、各 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spm}(\mathfrak{O})$ に対して、$X_{(\mathfrak{p})}$ が smooth で、なおかつ、$\mathcal{A}_{X(\mathfrak{p})}$ が $X_{(\mathfrak{p})}$ 上 $\mathcal{O}_{X(\mathfrak{p})}$-加群として有限階数の自由加群であるときに言う、とやればよい。ただしもう少し条件を追加したほうがよいと思われる (例えば、 $X_{(\mathfrak{p})}$ が $\mathfrak{p}$ に

よらずに決まるある代数空間の $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ に係数を落としたものになっているという条件を課したほうがよいかも知れない等々。) のも確かなので、ここではおくことにする。

pre NCAS のなかでも基本的と考えられるのが、affine なもの、すなわちある $\mathfrak{O}$-代数 A があって、$\mathcal{C}_{\mathrm{qcoh}}(X)$ が (A-modules) であるようなものである。

もっとも、どんな A にたいしても $(A-\mathrm{modules})$ が pre NCAS になるわけではない。(4.2 節) ここで扱いたいのは、微分のなす環や、それに近いもの、なかでも Weyl 環 (4.1 節) や半単純 Lie 環の普遍包絡環 (4.3 節) である。

$X_{(\mathfrak{p})}$ としては、$A/\mathfrak{p}A$ の中心の Spec を採るのが自然であるようにもみえる。実際、Weyl 環ではそれでよいのだが、が、半単純 Lie 環の普遍包絡環の例ではそうでもないようである。

もうすこしいろいろな例について研究することが必要であるとおもわれる。

以下では幾つかの例について、アファインな pre NCAS とその「貼り合わせ」のときにどのようなことが起こりそうかを中心に見ることにする。

4. 例

4.1. **Weyl algebra.**

Definition 4.1. 可換環 k 上の Weyl 代数 $A_n(k)$ とは、次のように定義される k 上の (非可換結合的) 代数のことである。

$$A_n(k) = k\langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\rangle/(\eta_j\xi_i - \xi_i\eta_j - \delta_{ij}; 1 \leq i, j \leq n),$$

(where δ_{ij} is the Kronecker's delta.)

$A_n(k)$ という記号の (k) の部分の言い訳をしておこう。これは ind-scheme の k-値点の意味である。k をいろいろ変えて眺めてみたいので、このような記号になった次第。じつはこれは「第二量子化」などの考えの影響を受けていて、環の元自体が観測の対象になるような理論になることを予定している。そこまで考えを進めたときに、k として非可換な環を考えるとどうか。k の元と ξ, η と可換と仮定してよいものか。それらの問題は大事である。しかしここではとりあえず k は可換環であるとしておこう。とくに k が可換体のときを主に考察する。

$A_n(k)$ の中心 $Z_n(k)$ は $2n$ 個の元 $\xi_1^p, \xi_2^p, \ldots, \xi_n^p, \eta_1^p, \eta_2^p, \ldots, \eta_n^p$ を自由生成元として持つような k 上の多項式環と同型で、$A_n(k)$ 自身は $Z_n(k)$ 上の matrix bundle の section の全体と同一視できる。

4.1.1. 正標数の *Weyl* 環の自己準同型. 標数 $p > 0$ の体 k を考える。簡単のため、k は完全体であると仮定しよう。Weyl 環の k-代数としての自己準同型があると、それは中心 $Z_n(k)$ の k-代数自己準同型を定める。(このことは自明ではない。詳しくは [6] に書いたのでそちらを御参照頂きたい。) さらに、$Z_n(k)$ の「p-乗根」を

$$S_n(k) = k[T_1, T_2, \ldots, T_n, U_1, U_2, \ldots, U_n] \qquad T_i = (\xi_i^p)^{1/p}, U_j = (\eta_j^p)^{1/p}$$

とすると、$S_n(k)$ 上の n-次元 (自明) ベクトル束の接続 ∇ を $A_n(k)$ から定めることができる。次の命題が成り立つ。

PROPOSITION 4.2. [7] k は標数 $p > 0$ の体であるとする。$\phi : A_n \to A_n$ なる k-代数準同型が与えられているとする。$f : \operatorname{Spec} S_n \to \operatorname{Spec} S_n$ を ϕ に付随して決まる *morphism* とする。G で「ゲージ変換」をあらわすと、つぎのような等式が成り立つ。

$$G(f^*\nabla)G^{-1} = \nabla + \omega \tag{4.1}$$

ここに、$\omega = \sum_{i=1}^{n}(\omega_{T_i}dT_i + \omega_{U_i}dU_i)$ はつぎの微分方程式の一意的な解である。

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{T_i}^p + (\partial/\partial T_i)^{p-1}(\omega_{T_i} - \sum_{j=1}^{n}\overline{T_j}\frac{\partial\overline{U_j}}{\partial T_i}) = 0 \\ &\omega_{U_i}^p + (\partial/\partial U_i)^{p-1}(\omega_{U_i} - \sum_{j=1}^{n}\overline{T_j}\frac{\partial\overline{U_j}}{\partial U_i}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.2}$$

where $\overline{T_i} = \hat{\psi}(T_i) = f^*(T_i)$, $\overline{U_i} = \hat{\psi}(U_i) = f^*(U_i)$

上の命題で、ω_{T_i} や ω_{U_i} となっているのは「ω の T_i や U_i の偏微分」と言う意味ではない。単に、1-形式 ω の成分を区別するための suffix である。物理では時おり見掛けるが、すこしよくない記号だったかも知れない。(かと言って他によい記号法は見当たらないようにも思える。)

上の命題の微分方程式が面白い微分方程式で、これは例えば $p = 3, n = 1$ で

$$\xi_1 \mapsto \xi_1\eta_1\xi_1, \eta_1 \mapsto \eta_1\xi_1\eta_1$$

で定まる ϕ についても使える。実はこの ϕ に対する f は étale ではなく、上の微分方程式を得る前にはこのような例がどのぐらいあるのかわからなかった。

微分方程式が得られたあとでは、次数の関係を吟味することにより、ϕ の (多項式としての) 次数が p より十分小さければ、f は étale で、なおかつ 接続 ∇ は保存される。すなわち、Weyl 環にたいして ∇ を対応させるやり方は、$p >> 0$ なら「標準的」であると言ってよい。この 接続 の曲率は

$$dT_1 \wedge dU_1 + dT_2 \wedge dU_2 + \cdots + dT_n \wedge dU_n$$

である。

4.1.2. *ultra filter* による標数 0 への移行. 全小節の結果と、ultra filter の議論を使えば、$\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}$ 上の Weyl 環 $A_n(\mathbb{Q}_{\mathcal{U}})$ にたいして symplectic 構造

$$dT_1 \wedge dU_1 + dT_2 \wedge dU_2 + \cdots + dT_n \wedge dU_n$$

をそなえたアフィン空間 $\mathbb{A}_n(\mathbb{Q}_{\mathcal{U}})$ を標準的に対応させることができる。これは量子力学などで「 $h \to 0$ の極限により古典化する」手法に似ているが、大きな違いはこちらの手法が「標準的」であることである。すなわち、我々の symplectic 構造は、Weyl 環 A_n と、

その $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}$-構造のみから決まる。このことは Weyl 環の「貼り合わせ」に十分大きな利益をもたらす。

4.1.3. *Weyl* 環の *localization* をとると *ultra filter* のようなものを使うのが不可避であること。.

$$A_n \to k\langle \xi, \eta, \xi^{-1} \rangle$$
$$\xi \mapsto \xi^2, \qquad \eta \mapsto \frac{1}{2}\xi^{-1}\eta$$

LEMMA 4.3. $f \in A_n(\mathbb{Z})$ が $f^p \in Z_n(\mathbb{F}_p)$ を *(*有限個の p を除いて*)* 満たすとき、$A_n(\mathbb{Z})_f$ *modulo* p は

$$((A_n)_f)(\mathbb{F}_p) = A_n(\mathbb{F}_p) \otimes_{Z_n(\mathbb{F}_p)} Z_n(\mathbb{F}_p)[(f^p)^{-1}]$$

をみたす。ゆえに、その中心は $Z_n(\mathbb{F}_p)[(f^p)^{-1}]$ と同型で、*finitely generated* である。

したがって、このような f で localize することが可能になる。

LEMMA 4.4. *Let p be a prime. Then in $k\langle \xi, \eta \rangle/(\eta\xi - \xi\eta - 1)$, we have the following identity.*

(1) $\xi^t\eta^t = (\xi\eta)(\xi\eta - 1)(\xi\eta - 1)\dots(\xi\eta - (t-1))$
(2) $\eta^t\xi^t = (\xi\eta + 1)(\xi\eta + 2)\dots(\xi\eta + t)$
(3) $(\xi\eta)^p - \xi\eta = \xi^p\eta^p$.
(4) *Let $f(w) = (w - a_1)\dots(w - a_l) \in k[w]$, $a_i \in k$. Then we have*

$$(f(\xi\eta)\eta^s)^p = \left(\prod_i (\xi^p\eta^p - a_i^p + a_i)\right)\eta^{sp}.$$

for any positive integer s which is relatively prime with p.

(5) *For any polynomial $f, g \in k[w]$, we have*

$$[f(\xi\eta)\eta^t, g(\xi\eta)\xi^t] = F(\xi\eta) - F(\xi\eta - t)$$

where $F(w) = w(w+1)(w+2)\dots(w-t+1)f(w)g(w+t)$.

すなわち、任意の多項式 f, 任意の $s > 0$ にたいして、$f(\xi\eta)\eta^s$ は localization でうまく振舞うような元の一つである。この元は $f(\xi\eta)$ と η の積の形をしているが、ようするに $f(\xi\eta)$ 単独では inverse をとると難しくなるけれども、η が可逆であるようなところに制限してしまえば大丈夫であるということだろう。

例えば、

LEMMA 4.5. $(\theta^2 - 2)\eta$ *($\theta = \xi\eta$)* にたいして、

$$((\theta^2 - 2)\eta)^p = \xi^{2p}\eta^{3p} - 4(1 - (\frac{2}{p}))\eta^p = \begin{cases} \xi^{2p}\eta^{3p} & (2\text{:平方剰余のとき}) \\ \xi^{2p}\eta^{3p} - 8\eta^p & (2\text{:平方非剰余のとき}) \end{cases}.$$

($(\frac{2}{p})$ is the Legendre's symbol).

ultra filter として 2 が平方剰余なほうを採用すると

$$B = A_n[\xi^{-1}, \eta^{-1}]$$

のなかで $(\theta^2 - 2)$ は「ほとんど可逆」(mod p で可逆) であり、ultra filter として 2 が平方剰余でないほうをとると、B に $(\theta^2 - 2)$ の逆元を付け加えることは mod p でも別の元を付け加えることを意味する。すなわち、ultra filter の取り方によって、inverse を付け加えることの意味は変わってくる。algebra としては同じものになるので、この違いは algebra を mod p のものの limit と見る見方の違いである。

4.2. **Cuntz O_2.** うまくいかない例も挙げておこう。Cunts 環 O_2 (のホネ) は、次のように定義されるような代数である。

$$O_2 = \langle e_1, e_2, e_1^*, e_2^*; e_1^* e_1 = 1, e_2^* e_2 = 1, e_1 e_1^* + e_2 e_2^* = 1, e_2^* e_1 = 0, e_1^* e_2 = 0, \rangle$$

(実際に巷で普通に定義されている O_2 は C^*-代数であって、上の「ホネ」の C^*-completion をとったものである。ただし、Cuntz 自身 C^* 代数としてだけではなくただの代数としても (つまり上の「ホネ」も) O_2 は興味深いと述べているので、ここではこれを O_2 と書くことにしよう。)

O_2 の有限次元表現では、(標数の如何にかかわらず) e_1, e_2 はともに可逆で、したがって $1 = e_1 e_1^* e_2 e_2^* = 2$ となる。これは矛盾だから、O_2 には (標数の如何にかかわらず) 有限次元表現は存在しない。

O_2 だけでなく、一般に、$O_3, O_4, \ldots, O_n, \ldots$ および O_∞ が定義される。(O_∞ は無限生成の環なので、少し別格とも言えるが) いずれの環でも、正標数に一度戻るアプローチはあまり有効でない。

Cunts 環は、KK-理論と呼ばれる二変数 (bivariant) K-理論の構成に有用な環 [1] なので、このことは少し残念ではあるが、Weyl 環と Cuntz 環の性格の違いを考えるとやむを得ないとも言える。私見によれば両者は実多様体とカントール集合位に違っている。

4.3. **リー環の普遍包絡環.** $\mathbb{C}$ 上の半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ を考えよう。普遍包絡環 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ が定義される。この環に対して我々の議論を適用したい。

まず $\mathfrak{g}$ はカルタン行列による表示をもつ。

THEOREM 4.6. *(Serre)* $\mathbb{C}$ 上の半単純 *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ は、次のような関係式を持つ生成元 $\{x_i, y_i, h_i | 1 \leq i \leq \ell\}$ で生成される。*(*記号等 *Lie* 環論におなじみの記号であるからここでは説明を省く。詳しくは [2] の *18.1* を参照のこと。*)*

(1) $[h_i h_j] = 0$
(2) $[x_i y_i] = h_i, \quad [x_i y_j] = 0$ *if* $i \neq j$.
(3) $[h_k x_j] = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle x_j, \quad [h_i y_j] = -\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle y_j,$
(4) $(\operatorname{ad} x_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(x_j) = 0$
(5) $(\operatorname{ad} y_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(x_j) = 0$

そこで、$\mathfrak{g}$ の生成元としてこの $\{x_i, y_i, h_i\}$ を採用し、

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}\langle\{x_i, y_i, h_i\}\rangle$$

とおこう。話が $\mathbb{Q}$ 上にまで落ちたことになって、十分大きな素数 p について $\mathbb{F}_p$ 上におとすというわれわれの手法が使えるようになる。(以下では幾つかのベクトル空間 V についてその係数環を $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{F}_p$ に変えたものを考えて、suffix でもって $V_{\mathbb{Q}}, V_{\mathbb{F}_p}$ 等とこれをあらわすことにする。これらはもちろん生成元に依存している。)

以下の所論には $\mathfrak{g}$ のもう少し詳しい情報が必要である。

$$\mathfrak{h} = \mathbb{C}\langle\{h_i\}\rangle, \quad \mathfrak{n}_+ = \mathbb{C}\langle\{x_i\}\rangle, \quad \mathfrak{n}_- = \mathbb{C}\langle\{y_i\}\rangle$$

とおくと、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_-$$

と書ける (三角分解)。$\mathfrak{h}$ の基底としては $\{h_i\}$ が採れる。$\mathfrak{n}_+$ (順に $\mathfrak{n}_-$) の基底としては $\{x_i\}$ (順に $\{y_i\}$) の単項式が選べるから、そうする。それによって、

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathfrak{n}_{+\mathbb{Q}} \oplus \mathfrak{n}_{-\mathbb{Q}}$$

とそれらの $\mathbb{Q}$-基底が得られる。以下の便宜のため、$\mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_-$ の上述の意味の基底を $\{n_1, n_2 \ldots, n_s\}$ と書くことにする。各 n_i は ad-nilpotent である。

これらのデータを標数 $p > 0$ の世界に落とそう。$\mathbb{Q}$ からはじめたわけだから落とした体としては $\mathbb{F}_p$ で十分であるわけだが、フロベニウス写像の作用を詳細に見るためにここでは標数 p の体 k を考えて、$\mathfrak{g}_k$ について考察する。

標数 p の世界では、restricted Lie 環の概念が存在する [3]。正標数の半単純 Lie 環は restricted Lie 環の代表例である。Lie 環の一般論をここで繰り広げるわけにはいかぬだろうから、無理矢理に次のようにまとめておこう。

THEOREM 4.7. 正標数の体 k 上の半単純 *Lie* 環 $\mathfrak{g}_k$ の *Killing form* は非退化であって、任意の $A \in \mathfrak{g}_k$ にたいして、

$$\mathrm{ad}(A)^p(B) = [A^{[p]}, B] \qquad (\forall B \in \mathfrak{g}_k)$$

をみたす $A^{[p]} \in \mathfrak{g}_k$ が唯一つ存在する。普遍包絡環の中で言えば、このことは、

$$[A^p, B] = [A^{[p]}, B] \qquad (\forall B \in \mathfrak{g}_k)$$

を意味する。

□

今の場合、 p が $\mathfrak{g}$ の構造定数 (や分母に現れる数) よりも十分大きいという仮定のもとで、

$$h_i^{[p]} = h_i \quad (i = 1, \ldots, \ell), \qquad n_j^{[p]} = 0 \quad (j = 1, \ldots, s)$$

がわかる。したがって、普遍包絡環には

$$(*) \qquad h_i^p - h_i \quad (i = 1, \ldots, \ell), \qquad n_j^p \quad (j = 1, \ldots, s)$$

なる中心元があることがわかる。

注意

普遍包絡環にはもっとたくさん中心元がある。casimir 作用素はその代表的なものであるし、一般的に、標数 0 の半単純リー環 $\mathfrak{g}$ のランク (Cartan sub algebra の次数) を r とすると、$\mathfrak{g}$ の普遍包絡環の中心 $\mathfrak{Z}$ は r 変数の多項式環である。(記号 $\mathfrak{Z}$ は [2] の 23.3 の証明のところのものと同一である。そこの所論と、Coxeter 群の一般論を用いれば $\mathfrak{Z}$ が多項式環であることがわかる。) したがって、 $\mathfrak{Z}$ の元を modulo p に落としたものが $\mathfrak{g}_k$ のほうにも出てくることになる。

Poincaré-Birkoff-Witt の定理により、(*) の元は k 上独立である。したがって、(*) で生成される可換環

$$R_k = k[\{h_i^p - h_i \quad (i = 1, \ldots, \ell), \qquad n_j^p \quad (j = 1, \ldots, s)\}]$$

は多項式環であることがわかる。そして $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_k)$ はこの多項式環上の有限生成自由加群と見ることができる。

R_k は生成元の取り方に依存していそうに見えるが実はそうではない。このことを見るために、$\mathfrak{g}_k$ から $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_k)$ への写像 φ を

$$\varphi(x) = x^p - x^{[p]}$$

で定義しよう。restricted Lie 環の定義から、簡単に 次の補題を示すことができる。

LEMMA 4.8. φ は *p-semilinear* である。 すなわち、

$$\varphi(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1^p\varphi(x_1) + c_2^p\varphi(x_2) \qquad c_1, c_2 \in k, x_1, x_2 \in \mathfrak{g}_k$$

である。

PROOF. 実際、

$$(X+Y)^p = X^p + Y^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(X,Y)$$

$$(X+Y)^{[p]} = X^{[p]} + Y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(X,Y)$$

が成り立つからである。記号を含めた詳細は [4] の V 章を参照のこと。そこの記号でいうと、一番目の式は (63) 式。二番目の式は $a^{[p]}$ の 定義 definition 4.1(ii) である。 □

R_k は φ の像で生成される可換環である。上記 Poincaré-Birkoff-Witt の定理による議論は、φ が単射であることを示している。とくに、$\mathrm{Spec}(R_k)$ は $\mathfrak{g}$ のベクトル空間としての双対空間 $\mathfrak{g}^*$ (を Frobenius 写像によってひねったもの) と標準的に同型である。

$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}_p})$ はその上の $\mathcal{O}$-coherent な algebra sheaf であって、$\mathcal{O}$-加群としては locally free である。標準ファイバーは [3] で「 $\mathfrak{g}$ の u-algebra」と呼ばれているものになる。

こうして、$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ には $\mathfrak{g}^*$ が対応するという、表面上は至極当然な結論にたどり着く。ただし、上述の algebra sheaf の存在など、面白い構造が更につけ加わっているとことが興味深い。

後記: この小節の内容はオリジナルではあるが、実は math.RT/0401002 などに同様の記述があることがあとでわかった。(京大の望月拓郎先生の御指摘による。)

780-8520 高知市曙町 2-5-1

高知大学理学部 数理情報科学科数理科学コース

e-mail: docky@math.kochi-u.ac.jp

References

[1] J. Cuntz, *A new look at KK-theory*, K-Theory **1** (1987), 31–51.

[2] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer-Verlag, 1972.

[3] N. Jacobson, *Lie algebras*, Interscience publishers, 1962.

[4] ———, *Basic algebra ii*, W. H. Freeman and company, 1980.

[5] A. L. Rosenberg, *Noncommutative schemes*, Compositio Math. **112, no. 1** (1998), 93–125.

[6] Y. Tsuchimoto, *Preliminaries on Dixmier conjecture*, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser.A Math.. **24** (2003), 43–59.

[7] ———, *Endomorphisms of Weyl algebra and p-curvatures*, Osaka Journal of mathtematics **42** (2005), no. 2, (To appear).