代数学特論 II 要約 NO.3

今日のテーマ:
$\boxed{\text{行列の単因子}}$
前回の流れから行くと、行列 A をまず弱固有空間ごとに分けて考えて、それぞれの部分で A の標準型を考えるのが自然であるのだが、若干見方をかえて加群の理論から話を進めよう。n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が与えられているとする。A は

$$V = \mathbb{C}^n = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2 + \mathbb{C}e_3 + \dots \mathbb{C}e_n$$

に作用する。但し、ここに、e_i は基本ベクトルである。V には、多項式環 $\mathbb{C}[X]$ が、

$$X.v = Av \qquad (\text{ 一般に } p(X).v = p(A)v)$$

(右辺は行列とベクトルのかけ算) として作用している。ドット (.) に注意。作用を考えるときにはいつでもこのドットをつける。

さて、V の成分を多項式に拡張して、

$$F_0 = \mathbb{C}[X]^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1(X) \\ a_2(X) \\ a_3(X) \\ \vdots \\ a_n(X) \end{pmatrix} ; a_i(X) \in \mathbb{C}[X] \quad (i = 1, 2, \dots, n) \right\}$$

というのを考えよう。F_0 の元 ${}^t(a_1(X), a_2(X), \dots, a_n(X))$ というのは形式的に

$$\begin{pmatrix} a_1(X) \\ a_2(X) \\ a_3(X) \\ \vdots \\ a_n(X) \end{pmatrix} = a_1(X)e_1 + a_2(X)e_2 + a_3(X)e_3 + \cdots + a_n(X)e_n$$

と書くこともできる。こっちのほうはドットがつかないことに注意。ドットや、行列の積との区別を強調するために、こちらのほうのことを

$$\begin{pmatrix} a_1(X) \\ a_2(X) \\ a_3(X) \\ \vdots \\ a_n(X) \end{pmatrix} = a_1(X) \otimes e_1 + a_2(X) \otimes e_2 + a_3(X) \otimes e_3 + \cdots + a_n(X) \otimes e_n$$

と書くこともある。($\otimes$ はテンソル記号と呼ばれる。)

テンソル記号をドットに置き換える操作を ϕ と書こう。すなわち、$\phi : F_0 \to V$ を

$$\begin{aligned}
&\phi(a_1(X) \otimes e_1 + a_2(X) \otimes e_2 + a_3(X) \otimes e_3 + \cdots + a_n(X) \otimes e_n) \\
=&a_1(X).e_1 + a_2(X).e_2 + a_3(X).e_3 + \cdots + a_n(X).e_n \\
=&a_1(A)e_1 + a_2(A)e_2 + a_3(A)e_3 + \cdots + a_n(A)e_n
\end{aligned}$$

で定義する。

ϕ は線型写像で、全射であることはすぐに分かる。ϕ の核は、次のような線型写像の像と一致する。

$$\psi : F_1 = \mathbb{C}[X]^n \ni L \mapsto (XE - A)L \in \mathbb{C}[X]^n = F_0$$

ψ を F_1 と F_0 の基底を取り換えることによって、できるだけやさしい表示にすること、これがポイントである。実は、 $XE - A$ のような特殊な元に限らず、そのようなやさしい表示がある。

すなわち、$\mathbb{C}[X]$ ではユークリッド除法 (余りを許した割り算) ができることから、「掃き出し法」が使えて、次のような命題が成り立つ。

命題 3.1. $M_n(\mathbb{C}[X])$ の元 B に対して、$\mathbb{C}[X]$ の元を成分にもつ行列 P, Q で、$\det(P) = 1, \det(Q) = 1$ を満たし、

$$PBQ = \begin{pmatrix} d_1(X) &&&&&&&& \\ & d_2(X) &&&&&&& \\ && d_3(X) &&&&&& \\ &&& \ddots &&&&& \\ &&&& d_r(X) &&&& \\ &&&&& 0 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

(ただし $d_1(X)|d_2(X)|d_3(X)|\dots|d_s(X)$) という形にできるものが存在する。

上の $d_1(X), d_2(X), d_3(X), \dots, d_s(X)$ は B の単因子と呼ばれる。

上の P, Q はそれぞれ次のような「基本変形」を具体的に表現するような行列の積である。

(1) P ...(行変形) B のある行の多項式倍を B の別の行に加える。
(2) Q ...(列変形) B のある列の多項式倍を B の別の列に加える。

この続きは次回にまわす。

問題 3.1. $\mathbb{C}[X]$ の元を成分にもつ 3 次の正方行列

$$B = \begin{pmatrix} X & 1 & 0 \\ 0 & X^2 & 1 \\ 0 & 0 & X^3 \end{pmatrix}$$

に対して、命題 3.1 を満たす $d_1, d_2, \dots, d_r$ および P, Q を具体的に求めなさい。