代数学特論 II 要約 NO.9

今日のテーマ:

$\boxed{\text{定数係数線型微分方程式}}$

十分大きな関数空間 (例えば $\mathbb{R}$ 上の複素数値 C^∞-関数の全体) を一つ固定して、 $\mathcal{F}$ と書こう。次のような微分方程式を解きたい。

$$(\partial_x^2 - 3\partial_x + 2)f = 0$$

(∂_x とは $\partial/\partial x$ のこと。以下同様) この方程式は ∂_x という $\mathcal{F}$ 上の線型作用素が、解の空間 M 上満たす関係式と考えることができる。M は実際は $\mathbb{C}$ 上有限次元であって、今までの線型代数の知識を活用することができる。

M には ∂_x が作用していて、M は ∂_x の $1, 2$ という二つの固有値により固有分解される。

$$M = \mathbb{C}\exp(x) + \mathbb{C}\exp(2x)$$

$\exp(x), \exp(2x)$ が固有ベクトルである。

同様に

$$(\partial_x^2 - 2\partial_x + 1)f = 0$$

についても線型代数的な解釈ができる。今度は解空間上 ∂_x の固有値が重複して出てくるところに注意が必要である。

高階の方程式、例えば

$$(\partial_x^3 - \partial_x^2 - \partial_x + 1)f = 0$$

でも事情は同じである。

問題 9.1. 微分方程式

$$(\partial_x^3 - 2\partial_x^2 - 4\partial_x + 8)f = 0$$

を解け。