

今日のテーマ

準同型、準同型定理と正規部分群 (2)

前回のレポートで左右の区別ができていなかった答案が目だったので、ここではっきりさせておこう。ただし、本講義では主に左剰余類を扱う。

定義 4.1. [再掲] G の部分群 H が与えられているとき、 G の「左クラス分け」が次のように定まる。

g_1 と g_2 が同じクラス $\Leftrightarrow g_1 = g_2h$ となる $h \in H$ が存在する。

- (1) このクラス分けによる x のクラスを x の H に関する左剰余類と呼ぶ。
- (2) このクラス分けによるクラスの全体の集合を G/H と書き、 G の H による左剰余集合と呼ぶ

定義 4.2. G の部分群 H が与えられているとき、 G の「右クラス分け」が次のように定まる。

g_1 と g_2 が同じクラス $\Leftrightarrow g_1 = hg_2$ となる $h \in H$ が存在する。

- (1) このクラス分けによる x のクラスを x の H に関する右剰余類と呼ぶ。
- (2) このクラス分けによるクラスの全体の集合を $G \setminus H$ と書き、 G の H による右剰余集合と呼ぶ

命題 4.1. H による右クラス分けと左クラス分けが一致するのは、 H が G の正規部分群のときで、その時に限る。

その他に、レポートでは部分群でないものによるクラス分けを試みていたものがあつた。それは大抵うまく行かない。問題 4.1 を参照のこと。

準同型定理の話に戻る。次の定理は準同型定理の基本応用例である。

定理 4.2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong C_n$

問題 4.1. 群 $G = \mathfrak{S}_4$ の部分集合 H を

$$H = \{(1), (2\ 3), (1\ 2\ 3)\}$$

で定義する。このとき、 G の H によるクラス分けを定義 4.1 のように行えるだろうか。うまく行なえないときにはどうしてだめなのか反例を挙げて答えなさい。