代数学 II 要約 NO.11

今日のテーマ

$\boxed{\text{シローの定理の応用}}$

シローの定理をもちいると、例えば次の結果を証明できる。

命題 11.1. p, q は素数で、$p < q$ であるとする。このとき、位数が pq の群 G について、次のことが言える。

(1) G には位数 p の部分群 H と、位数 q の部分群 K が存在する。
(2) K は G の正規部分群である。
(3) $G \cong H \ltimes K$ である。

シローの定理とは違うが、次のことにも注意しておこう。

補題 11.1. 有限群 G の部分群 H が与えられたとき、

$$N_G(H) = \{x \in G; xHx^{-1} = H\}$$

は、G の部分群であり、$N_G(H) \supset H$ である。G の部分群で H と共役なものの個数 k は、$[G : N_G(H)]$ にひとしい。とくに、 k は $[G : H]$ の約数である。

系 11.1. 有限群 G の位数が $p^a m$ (m は p で割り切れない) であるとする。このとき、 G の p-シロー群の個数 k は m の約数である。

シローの定理により $k-1$ は p の倍数であることに注目すると、上のこととあわせて p-シロー群の数について強い制限がつくことが分かる。

次の二つの補題も位数が低い群を調べる際には有効である。

補題 11.2. 群 G の素数位数の部分群 P_1, P_2 があるとき、$P_1 = P_2$ または $P_1 \cap P_2 = \{e\}$ のどちらかが成り立つ。

補題 11.3. 有限群 G の位数 n が素数 p でただ一度だけ割れるとする。すなわち、し、$n = pm$ で、m は p で割れないとする。G の p-シロー群の個数を k 個とすると、G の元で、位数が p のものはちょうど $(p-1)k$ 個である。

問題 11.1. 位数 $2^2 \times 5$ の群 G には必ず自明でない正規部分群 N が存在することを示しなさい。

問題 11.2. 位数 $2^2 \times 3$ の群 G の 3-シロー群か 2-シロー群のいずれかは正規部分群であることを示しなさい。(どちらの場合も起こり得る。)