

今日のテーマ

群の集合への作用と表現

定義 12.1. 群 G の集合 X への作用とは、次のような条件を満たす写像

$$G \times X \ni (g, x) \rightarrow g.x \in X$$

のことである。

- (1) $(g_1 g_2).x = g_1.(g_2.x)$ ($\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X$).
- (2) $e.x = x$ ($\forall x \in X$).

例 12.1. 群 G と、その部分群 H が与えられたとき、 G は G/H に

$$g.[x] = [gx]$$

により作用する。($[x]$ は $x \in G$ の G/H でのクラス).

例 12.2. 群 G の G への作用を次の三種類定義することができる。

- (1) $g.x = gx$. (左作用)
- (2) $g.x = x(g^{-1})$. (右作用)
- (3) $g.x = gxg^{-1}$. (共役による作用).

例 12.3. 有限群 G が与えられているとき、 $X = \{G \text{ の部分群} \}$ への G の作用が

$$g.H = gHg^{-1}$$

により決められる。 X として、 G の p -シロー群の全体をとっても同様に作用が定義される。

補題 12.1. G が有限集合 X に作用しているとする。このとき G から \mathfrak{S}_n ($n = \#X$) への群準同型が定まる。

問題 12.1. G が位数 80 の群であるとき、 G の 2-シロー群の数は 1 か 5 であることを示し、 G には必ず正規部分群があることを示しなさい。