代数学演習 I 問題 NO.4

《イデアルの生成元》編

定義 4.1. R を環、I をそのイデアル、S を R の部分集合とします。I が S で (イデアルとして) 生成されるとは、次の二条件を満たすときに言います。

(1) I は S を部分集合として含む。
(2) I は、S を部分集合として含むイデアルの中で最小のものである。すなわち、 S を含む R の任意のイデアル J に対し、$I \subset J$ が成り立つ。

S が有限集合 $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ のとき、S で生成されるイデアルを普通 $(x_1, \dots, x_n)$ と丸括弧を用いて書きます。

例題 4.1. $\{9, 12\}$ で生成される $\mathbb{Z}$ のイデアル $I = (9, 12)$ を求めよ。

解答 I は引き算について閉じているから、

$$I \ni 12 - 9 = 3.$$

さらに、I は $\mathbb{Z}$ による掛け算により閉じているから、

$$3\mathbb{Z} \subset I.$$

ところが、 $3\mathbb{Z}$ は $\{9, 12\}$ を含む $\mathbb{Z}$ のイデアルであるから、I の最小性により、

$$I \subset 3\mathbb{Z}$$

以上により、$I = 3\mathbb{Z}$ が分かった。($I = (3)$ と書いても良い。次の問題も参照)

問題 4.1. R を環、S をその部分集合とします。この時 S で生成される R のイデアル I がただひとつ存在することを次の順序で示しなさい。

(1) (一意性) I, J がともに S で生成される R のイデアル (すなわち定義 4.1 の (1),(2) を満たす) ならば、I, J 両方の最小性を用いて、$I = J$ が分かる。
(2) (存在 I) S を含む R のイデアルは一つは必ず存在することを示しなさい。
(3) (存在 II) S を含む R のイデアルの全体を $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ とすると、それらすべての共通部分

$$I_0 = \cap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$$

も R のイデアルで、かつ S を含むことを示しなさい。
(4) (存在 III) 上の I_0 が S を含む最小のイデアルであることを示しなさい。

問題 4.2. 次の $\mathbb{Z}$ のイデアルを簡単な形になおしなさい。

(1) $I_1 = (4, 6)$
(2) $I_2 = (12, 18, 30)$
(3) $I_3 = (78, 54, 62)$

問題 4.3. 次の $\mathbb{C}[X]$ のイデアルを簡単な形になおしなさい。

(1) $I_1 = (X^3, X^2)$
(2) $I_2 = (X^3 - 1, X^2 - 1)$
(3) $I_3 = (X(X-1), (X+1)(X-1), X(X+1))$