代数学 C NO.6 要約

今日のテーマ 《群の、部分群による左剰余類集合》
G を群、H をその部分群とする。このとき、
• G に、次のようにして同値関係 $\sim$ が定まる。

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ある } h \in H \text{ があって、} xh = y \text{ が成り立つ。}$$

定理 6.1. G を群、H をその部分群とする。このとき、G に、次のようにして同値関係 $\sim$ が定まる。

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ある } h \in H \text{ があって、} xh = y \text{ が成り立つ。}$$

これからはこの同値関係には記号 $x \sim y$ の代わりに、

$$x \equiv y \pmod H$$

と書いて、《x は y と H を法として左合同である》と言う事にする。考えている 部分群 H が明確なときには、$(\mathrm{mod}\ H)$ を書くのは省略して良い。x のクラス $C(x)$ を x の H を法とする左剰余類と言う。
• 上のように決めた同値関係 $\equiv \pmod H$ による G の商集合$G/\equiv$ を G/H と書き、G の H による左剰余類集合という。

例 6.1. $(\mathbb{Z}, +)$ をその部分群 $n\mathbb{Z}$ で割ると、以前に説明した「拡張した番号づけをされた頂点の集合」 と同じものが得られる。

定理 6.2. G を群とし、H をその部分群とする。このとき、

(1) G の任意の元 g に対して、g の H を法とする左剰余類 $C(g)$ は

$$gH = \{gh; h \in H\}$$

と一致する。

(2) $C(g)\ (= gH)$ と H とは元の個数が等しい。

(3) G の位数 $|G|$ が有限ならば、G/H の元の個数 $\#(G/H)$ と H の位数 $|H|$ とはともに有限で、

$$|G| = \#(G/H)|H|$$

が成り立つ。

※レポート問題
つぎのうち一問を選択して解きなさい。(期限:次の講義の終了時まで。)

(I) 元 a で生成される位数二十の有限巡回群 $C_{20}(= \langle a; a^{20} = e\rangle)$ を考えます。a^4 で生成される C_{20} の部分群 H の元をすべて書き出し、G が、《H を法として左合同》と言う同値関係でどのように類別されるか、C_{20} の元のクラス分けの表を作って示しなさい。特に、C_{20}/H の元の個数はいくらか？

(II) 群 G とその部分群 H とが与えられたとします。$|H|$ と $\#(G/H)$ とがともに有限ならば、$|G|$ も有限である事を示しなさい。