代数学 C NO.10 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 群の直積 (+準同型定理の応用)

定義 10.1 (群の直積). $(G_1, \spadesuit)$ と、$(G_2, \heartsuit)$ とが共に群であるとする。このとき、デカルト積集合

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2); \quad g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2\}$$

は、次のような演算 $\diamondsuit$ により群になる。

$$(a_1, a_2) \diamondsuit (b_1, b_2) = (a_1 \spadesuit b_1, a_2 \heartsuit b_2)$$

$(G_1 \times G_2, \diamondsuit)$ を G_1 と G_2 の (群としての) 直積と呼ぶ。

定理 10.1 (有限巡回群の直積分解). m, n を互いに素な正の整数とする。このとき、同型

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

が存在する。

系 10.1. m, n を互いに素な整数とすると、

$$am + bn = 1$$

となる整数 a, b が存在する。

この系自身もよく利用される。m, n が具体的に与えられたとき、a, b の値を具体的に求めるには、ユークリッドの互除法を用いると良い。応用例として一つだけ挙げておく。

系 10.2 (系の系). m, n を互いに素な正の整数とする。このとき、$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の、$\bar{n}$ で生成される部分群は、$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 自身である。

※レポート問題

つぎのうち一問を選択して解きなさい。(期限:次の講義の終了時まで。)

(I) 適当な準同型

$$\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$$

を考えることにより、

$$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$$

が位数 105 の巡回群と同型であることを示しなさい。

(II) $n = 10^{10} + 19, m = 11^8$ のとき、$am + bn = 1$ をみたす整数の組 a, b を求めなさい。(コンピュータを用いても良い。というか実際問題として必須だろう。) 必要なら

`http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/kogi/index.html`

からたどれるページで ubasic もしくは mupad をダウンロードして使うと良い。C 言語で組んで問題を解く際にはオーバーフローを起こさないように注意すること。