$\boxed{\text{復習}}$ **今日は先週の残りの証明を行なう。**

ついでに. . . . .

No.10 **の問題** (I) **の解答。問題の** f, g, h **にたいして、**$k[X]$ **のイデアル** (f, g, h) **を** I **とおく。**(**じつは、**

$$f = \bigl(X^2 + 3\,X + 5\bigr) \cdot \bigl(X^2 + X - 1\bigr)$$
$$g = \bigl(X^2 + X - 1\bigr) \cdot \bigl(X^3 + X - 1\bigr)$$
$$h = \bigl(X^2 + 3\,X + 5\bigr) \cdot \bigl(X^3 + X - 1\bigr)$$

であって、これに気づくと以降の話がずいぶんと楽に進む。)

f, g **についてユークリッドの互除法を行なうと、**

$$l(X) = X^2 + X - 1 = \frac{1}{111}((5X^2 - 14X + 22)f(X) + (-5X - 1)g(X)) \in I$$

を得る。次に l, h **についてユークリッドの互除法を行なう。**

$$1 = \frac{1}{10}((4\,X^4 + 15\,X^3 + 34\,X^2 + 31\,X + 25)l(X) + (-4\,X - 7)h(X)) \in I.$$

このことから、$I = k[X]$ **がわかる。**

. . . .

問題 12.1. (**期限：次の講義の終了時まで。**)

(I) (i) **多項式** $f, g, h \in \mathbb{Q}[X]$ **を**

$$f(X) = (X - 2)(X - 3)(X - 10),$$
$$g(X) = (X - 1)^2(X - 3)^2(X - 10),$$
$$h(X) = (X - 1)^2(X - 2)(X - 10).$$

で定める。このとき、

[Case 1] $p(X) = 1$
[Case 2] $p(X) = (X - 10)$
[Case 3] $p(X) = (X + 1)(X - 10)$

のそれぞれの場合について、

$$af + bg + ch = p$$

を満たす多項式 $a, b, c \in \mathbb{Q}[X]$ **は存在するだろうか。存在するならばそのような** a, b, c **の例を挙げ、 存在しないならばその理由を述べよ。**

(ii) $\mathbb{Q}[X]$ **のイデアル** (f, g, h) **を簡単にせよ。**