

環の準同型定理編

問題 6.1 (全部で 1 点). \mathbb{R} から \mathbb{R} への次の写像はいずれも環準同型でないことを示しなさい。

- (1) $f_1(x) = (x + 1)/2$
- (2) $f_2(x) = x^2$
- (3) $f_3(x) = 2x - 1$
- (4) $f_4(x) = x^3 + x^2 - x$

問題 6.2. \mathbb{Z} から \mathbb{Z} への環準同型は存在するだろうか。存在する場合には全て挙げ、存在しない場合はその理由をのべよ。

問題 6.3. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ から \mathbb{Z} への環準同型は存在するだろうか。存在する場合には全て挙げ、存在しない場合はその理由をのべよ。

問題 6.4. \mathbb{Q} から \mathbb{Z} への環準同型は存在するだろうか。存在する場合には全て挙げ、存在しない場合はその理由をのべよ。

問題 6.5. (各 1 点) \mathbb{R} から \mathbb{R} への環準同型 f が与えられているとするとき、

- (1) $f(\mathbb{R}_{\geq 0}) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ であることを示しなさい。
- (2) $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$ ならば $f(x) \leq f(y)$ であることを示しなさい。
- (3) f は連続であることを示しなさい。
- (4) $f = \text{id}$ (恒等写像) であることを示しなさい。

問題 6.6. \mathbb{C} から \mathbb{C} への準同型写像の例を二つ(以上)挙げなさい。(二つはかなり簡単に見つかるが、三つめを挙げるのは超難問である。それゆえ二つ答えるのが無難である。)

以下この演習では、とくに断らないで $[?]_n$ で ? の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ でのクラスを表すことがある。文脈でわかると思うので、いちいち書かないが、注意していただきたい。

問題 6.7. $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ への写像 f を

$$f([x]_{20}) = [x]_5 \quad (x \in \mathbb{Z})$$

で定める。このとき、 f はうまく定義されていて、環準同型であることを示しなさい。

問題 6.8. $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ への写像 f を

$$f([x]_{31}) = [x]_7 \quad (x \in \mathbb{Z})$$

で定めたいが、 f はうまく定義されていて、環準同型であるだろうか。理由をつけて答えなさい。

問題 6.9. 体 K から環 R への準同型写像は必ず単射であることを示しなさい。

問題 6.10. 環準同型写像 $f : \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ を考える。一行目に $x \in \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ (18 個), 二行目に $f(x)$ が並んだような表を作り、 $\text{Ker}(f)$, $f^{-1}([1]_6)$, $f^{-1}([2]_6)$ をそれぞれ求めなさい。