

and, or, not と「ならば」

数学では、幾つかの、真なる命題(公理)から出発して、一定の推論規則を使って他の命題(補題や定理)を導き出す。

(推論規則は、大変易しいが、ときとして日常での推論とはずれることがある。これは主として、日常生活ではよく行なわれる「含意」とか「行間を読む」といったものを数学では極力排していることによる。すなわち、正しい証明を読めば(間違わない限りは、)誰でも同じ結論にたどり着けるようにしてある。)

既存の命題から、新しい命題を生み出すための基本的な道具が、「and, or, not」である。その説明のために、まずつぎの定義をしておく。

定義 3.1 (真理値). 命題の真理値を、つぎのように定める。

- (1) 命題 P が正しい(真である)とき、その真理値は 1 であると定める。
- (2) 命題 P が正しくない(偽である)とき、その真理値は 0 であると定める。

定義 3.2. 命題 P が与えられていて、 P の真理値は p であるとする。このとき、「not P 」なる命題をあらたにつくっても構わない。この命題の真理値は、 $1 - p$ である。

定義 3.3. 命題 P, Q が与えられていて、 P の真理値は p , Q の真理値は q であるとする。このとき、

- (1) 「 P and Q 」なる命題をあらたにつくっても構わない。この命題の真理値は、 pq である。
- (2) 「 P or Q 」なる命題をあらたにつくっても構わない。この命題の真理値は、 $\max(p, q)$ である。

定義 3.4. 命題 P, Q が与えられていて、 P の真理値は p , Q の真理値は q であるとする。このとき、

「 $P \implies Q$ 」(「 P ならば Q 」と読む。)なる命題をあらたにつくっても構わない。この命題の真理値は、「(not P) or Q 」と同じである。

上の三つは、数学の推論の仕方の基本的な取り決めである。「or」と「ならば」の使い方はとくに注意が必要である。日常語としては、これらの語を上記以外の使い方で用いることもあるが、「議論を明確にする」ために上のようにきめてあるわけだ。

かけ算における九九の表や、筆算のように、真理値についても表をつくって理解の助けにすることがある。これを真理表という。形式は、どのようなものでも良いわけだが、例えばつぎのようにつくる。

0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

上の表の一番右の欄が「 $P \implies Q$ 」の真理値を表している。

問題 3.1. 真理値を書き込んで、下の真理表を完成せよ。

P	Q	$P \implies Q$	$P \text{ and } (P \implies Q)$	$(P \text{ and } (P \implies Q)) \implies Q$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

「and, or, not ...」は日本語ではもちろんそれぞれ「かつ、または、... でない」である。ここでは、強調のためあえて英語を用いた。また、つぎのような記法が用いられることもある。

$P \wedge Q$	$P \text{ and } Q$	(P かつ Q)
$P \vee Q$	$P \text{ or } Q$	(P または Q)
$\neg P$	not P	(P でない)