数列の収束の定義とそれに関する諸定理

収束の定義は前回の定義 2.4 で述べた通りである。それでは定義 2.4 の判定法を満たす c は唯一つだろうか？

定理 3.1. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (ある人が確かめたところ) c に収束し、(別の人が確かめたところ) c' にも収束するなら、

$$c = c'$$

である。つまり、数列の収束先は存在するとしたら唯一つしかない。

そこで、つぎのように定義することができる。

定義 3.1. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある数 c に収束するとき、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c$$

と書いて、c のことを $\{a_n\}$ の**極限**と呼ぶ。

- 三角不等式

$$|a+b| \leq |a| + |b| \qquad (\forall a, \forall b \in \mathbb{R})$$

定理 3.2. (“定理 1.2”)

(1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0$$

(2) $a_n \leq b_n \quad (\forall n)$ で、かつ $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束するなら、

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

(3) $a_n \leq c_n \leq b_n \quad (\forall n)$ で、かつ $\{a_n\}, \{b_n\}$ が同じ数 α に収束するなら、 $\{c_n\}$ も α に収束する。

定理 3.3. (“定理 1.3”) 収束する数列は有界である。

定理 3.4. (“定理 1.4”) 実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ はそれぞれ収束するとする。このとき、

(1) 「極限をとる」という操作は線形である。すなわち、$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ は収束して、

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda(\lim_{n\to\infty} a_n) + \mu(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

(2) 「実数の乗法は連続である。」

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

(3) 実数の除法は「連続」である。もっと詳しく言うと、$\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ なら、有限個の例外を除いて $b_n \neq 0$ であって、

$$\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)/(\lim_{n\to\infty} b_n).$$

定義 3.2. 実数列 $\{a_n\}$ が単調増加であるとは、

$$\forall n \forall m (n \geq m \implies a_n \geq a_m)$$

がなりたつときにいう。

次の定理は、既知の数から未知の数 (e など) を作り出すときに有効である。

定理 3.5. (“定理 1.5”) 上に有界な単調増加数列は収束する。

問題 3.1. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が c に収束するとき、

$$\{a_n^3 + 5a_n^2 + 7\}_{n=1}^{\infty}$$

は収束すると言えるだろうか。言えるならばその収束先と理由を、言えないならば反例を作りなさい。(注意: 今回の講義で証明する定理をただ用いるのではなく、収束の定義に戻って (ϵ-N 論法で) 説明すること。)