微分積分学概論 AI 要約 NO.9

極限に関する定理

定理 9.1 (“教科書定理 1.9”). 3 つの関数 f, g, h が、 実数 a を含む区間 D で定義されており、$x \in D$ $(x \neq a)$ で、 $f(x) \leq g(x)$ とする。このとき、

(1) $x \to a$ のときの $f(x), g(x)$ の極限がともに存在すれば、

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

(2) $x \in D(x \neq a)$ の範囲で、$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ であって、なおかつ

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) \quad (\text{この等しい値を } A \text{ とおく})$$

がなりたつとすると、 $h(x)$ も $x \to a$ のときの極限が存在して、A に等しい。

定理 9.2. f, g が a の近くで定義されており、

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B$$

がそれぞれ存在するとする。このとき、

(1) $\lim_{x\to a}(c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 A + c_2 B$. (但し $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.)
(2) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = AB$.
(3) $B \neq 0$ のとき、ある正の実数 c が存在して、$g(x)$ は $(a-c, a+c)$ で (定義されてなおかつ) 0 以外の値をとり、

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

問題 9.1. $f(x) = x^3 + 3x - 5$ とおく。このとき、正の実数 ϵ にたいして、

$$|x - 1| < \delta \implies |f(x) - f(1)| < \epsilon$$

をみたすような正の数 δ の例あげて、実際それを確かめなさい。

命題 9.3. 関数 $f(x)$ が a の近くで定義されており、

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

がなりたつとする。このとき、点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束すれば、

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$$

である。

命題 9.4. 関数 $f(x)$ が a を含む開区間 D 上で定義されており、ある実数 A にたいして

「a に収束する D 内の任意の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ にたいして、

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$$

がなりたつ。」

をみたせば、

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

である。