代数学 IB NO.12 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$《素元分解環》(3)

命題 12.1. 素元分解環 R 上の一変数多項式

$$f(X) = c_d X^d + c_{d-1} X^{d-1} + \cdots + c_1 X + c_0$$

について、

(1) $g \in R[X]$ が $R[X]$ のなかで f の約元であるならば、g の定数項は f の定数項 c_0 の約数であり、g の最高次の係数は f の最高次の係数 c_d の約数である。

(2) f の根で、$K = Q(R)$ に含まれるものは必ず

$$a/b \quad (a, b \in R,\ a|c_d,\ b|c_0)$$

なる形をしている。

例 12.1. $f(X) = 15X^3 + 59X^2 + 23X - 77$ とおく。f を $\mathbb{Z}[X]$ の元として素元分解したい。

(1) f の根で $\mathbb{Q}(= Q(\mathbb{Z}))$ に属するものは

$$a/b \quad (a, b \in \mathbb{Z},\ a|15,\ b|77)$$

なる形をしている。(32 通りの可能性がある。)

(2) そのうち、本当に根であるものは $c = -7/3$ の一つのみである。

(3) 因数定理により、f は $X - c$ を (環 $\mathbb{Q}[X]$ のなかで) 因数に持つ。

(4) 実際に割ってみると

$$f(X) = (X + 7/3)(15X^2 + 24X - 33)$$

となる。但しこれは $\mathbb{Q}[X]$ の中での分解ではあるが、$\mathbb{Z}[X]$ の中での分解ではない。

(5) ポイントは、上の因数分解で全体を定数倍だけ調節することにより、$\mathbb{Z}[X]$ の元としての因数分解を得られる所にある。

$$f(X) = (3X + 7)(5X^2 + 8X - 11)$$

(6) $g(X) = 5X^2 + 8X - 11$ の $\mathbb{Z}[X]$ の中での分解について考えよう。まずこの式は有理数の根を持たないことに注意する。

(7) 二次式をが可約であれば一次のの因子をもつはずである。ゆえに g は $\mathbb{Q}$ 上既約である。

(8) $\mathbb{Q}$ 上既約な $\mathbb{Z}$ 上の原始的多項式であるから、g は $\mathbb{Z}$ 上既約である。

以上をまとめると、$f(X) = (3X + 7)g(X)$ が f の $\mathbb{Z}[X]$ の元としての素元分解であることがわかる。

なお、4 次以上の式については有理根のあるなしだけで既約性を判定することはできない。

$$X^4 + X^3 + 4X^2 + X + 3 = (X^2 + 1)(X^2 + X + 3)$$

など。

問題 12.1. 整数 a にたいして、

$$f_a(X) = X^3 + aX + 7$$

と定義する。このとき $f_a(X)$ が $\mathbb{Z}[X]$ の中で可約である (=既約でない) ような a の値を全て求めなさい。