

## 代数学演習 IB 問題 NO.3

### イデアルの定義編

定義 3.1. 環  $R$  の部分集合が  $R$  のイデアルであるとは、

- (1)  $I$  は  $(R, +)$  の部分加群である。
- (2)  $r \in R, a \in I \implies ra \in I, ar \in I$

の二条件が成り立つときに言います。

問題 3.1. 環  $R$  の部分集合  $\{0\}$  は  $R$  のイデアルであることを示しなさい。(通常  $\{0\}$  を単に  $0$  であらわします。)

問題 3.2. (各 1) 次の各  $R, I$  の組合せにおいて、「 $I$  は環  $R$  のイデアルである」といえるだろうか? 理由をあげて答えなさい。

- (1)  $R = \mathbb{N}, I = 0$ .
- (2)  $R = \mathbb{Z}, I = 2\mathbb{Z} + 1$ .
- (3)  $R = \mathbb{Z}, I = \mathbb{N}$ .
- (4)  $R = \mathbb{R}, I = 2\mathbb{Z}$ .
- (5)  $R = \mathbb{C}, I = \mathbb{R}$ .
- (6)  $R = \mathbb{C}[X], I = \mathbb{C}$ .
- (7)  $R = \mathbb{Z}, I = (\text{素数の全体})$ .

定義 3.2. 環  $R$  の部分集合  $A, B$  について、

- (1)  $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$ .
- (2)  $A \underset{\text{(set)}}{\cdot} B = \{ab; a \in A, b \in B\}$ .

と定義します。他に紛れがない時には、 $A \underset{\text{(set)}}{\cdot} B = \{ab; a \in A, b \in B\}$  のことを単に  $AB$  とも書きます。

問題 3.3.  $I, J$  が環  $R$  のイデアルならば、 $I \cap J$  も  $R$  のイデアルであることを示しなさい。

問題 3.4.  $I, J$  が環  $R$  のイデアルならば、 $I \cup J$  も  $R$  のイデアルであるといえるだろうか。

問題 3.5.  $I, J$  が環  $R$  のイデアルならば、

$$I + J = \{a + b; a \in I, b \in J\}$$

も  $R$  のイデアルであることを示しなさい。

問題 3.6.  $\mathbb{Z}[X]$  の部分集合

$$I = \{f \in \mathbb{Z}[X]; f \text{ の定数項は } 2 \text{ の倍数}\}$$

は  $\mathbb{Z}[X]$  のイデアルだろうか?

問題 3.7.  $\mathbb{Z}[X]$  の部分集合

$$J = \{f \in \mathbb{Z}[X]; f(0) \in 3\mathbb{Z} \text{ and } f'(0) \in 3\mathbb{Z}\}$$

は  $\mathbb{Z}[X]$  のイデアルだろうか?

問題 3.8.  $I, J$  が可換環  $R$  のイデアルであるにもかかわらず

$$I \underset{\text{(set)}}{\cdot} J = \{ab; a \in I, b \in J\}$$

( $I$  と  $J$  の  $R$  の部分集合としての積) が  $R$  のイデアルにならないような例を具体的にあげなさい。

問題 3.9.  $I, J$  が可換環  $R$  のイデアルならば、

$$IJ = \left\{ \sum_i a_i b_i (\text{有限和}); a_i \in I, b_i \in J \right\} \quad (\text{注意})$$

も  $R$  のイデアルとなることを示しなさい。 $(IJ)$  のことを  $I$  と  $J$  のイデアルとしての積と呼ぶ。

問題 3.10. 可換環  $R$  の中零元全体

$$P = \{x \in R; x^n = 0 (\exists n \in \mathbb{Z}_{>0})\}$$

は  $R$  のイデアルとなることを示しなさい。

定義 3.3. 単位元を持つ可換環  $R$  上の一変数多項式とは、

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \cdots + a_1 X + a_0 \quad (a_n, \dots, a_0 \in R)$$

のように表されるもののことです。 $R$  上の一変数多項式の全体は環をなします。これを  $R$  上の一変数多項式環と言って、 $R[X]$  であらわします。以下面倒なので《一変数多項式》が出てくる問題では、 $R$  は単位元を持つ可換環であると仮定していることにします。

問題 3.11. (単位元を持つ可換) 環  $R$  上の一変数多項式  $f(X)$  と  $R$  の元  $a$  について、 $f(a) = 0$  ならば、

$$f(X) = (X - a)g(X) \quad g(X) \in R[X]$$

とあらわせることを示しなさい。

定義 3.4. 環  $R$  の元  $a$  は、

$$ab = 0$$

なる  $b (\neq 0) \in R$  が存在するとき、左零因子と呼ばれます。右零因子も同様に定義されます。可換環では、左右の区別がいらないので、単に零因子と呼びます。零因子が 0 しかない可換環を整域と呼びます。

問題 3.12. 整域  $R$  上の一変数多項式  $f(X)$  は、 $R$  に高々  $d$  個しか根を持たないことを示しなさい。

問題 3.13. 可換環  $R$  上の一変数多項式  $f(X)$  の係数のうちに非零因子があれば、 $f(X)$  は  $R[X]$  の非零因子となることを示しなさい。

問題 3.14. 有理数体  $\mathbb{Q}$  上の二変数多項式環  $\mathbb{Q}[X, Y]$  のイデアル  $I$  が  $X + Y(X + 1), Y, X^2$  を元として含む時、 $I$  は  $X, Y$  も元として含むことを示しなさい。

問題 3.15. (各 1) 有理数体  $\mathbb{Q}$  上の二変数多項式環  $\mathbb{Q}[X, Y]$  のイデアル  $J$  が  $X + Y, X + Y^2, X + Y^3, X + Y^4, X + Y^5$  を元として含む時、

- (1)  $J$  は  $X + Y, Y^2 - Y$  を元として含むことを示しなさい。
- (2)  $X + Y, Y^2 - Y$  を元として含むような  $\mathbb{Q}[X, Y]$  のイデアルは必ず  $J$  を部分集合として含むことを示しなさい。