

解析学 IA 演習 NO.4

問題 4.1 (各 1(但し順に解くこと)). $f(x, y) = x^2y^3$ にたいして、

(1)

$$f_x(1, 2) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1, 2)}, \quad f_y(1, 2) = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1, 2)}$$

をそれぞれ求めなさい。

(2) $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a, b)}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a, b)}$$

をそれぞれ求めなさい。

(3) 全微分 $df|_{(a, b)}$ を定義にしたがって求めなさい。

問題 4.2. (各 1) 問題 4.1 の (2) と (3) とを $f(x, y) = \sin(xy)$ に対して繰り返しなさい。

問題 4.3. (各 1) 問題 4.1 の (2) と (3) とを $f(x, y) = x^y$ (定義域は $\{(x, y); x > 0, y > 0\}$) に対して繰り返しなさい。

問題 4.4. (各 1) 問題 4.1 の (2) と (3) とを $f(x, y) = \sqrt{y}$ (定義域は $\{(x, y); x > 0, y > 0\}$) に対して繰り返しなさい。

問題 4.5. (各 1) 問題 4.1 の (2) と (3) とを $f(x, y) = \arctan(y/x)$ (定義域は $\{(x, y); x \neq 0\}$) に対して繰り返しなさい。

問題 4.6.

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xy \\ x \end{pmatrix}$$

に対して、 $Df|_{(1, 2)}$ を求めなさい。すなわち、

$$f \begin{pmatrix} 1+h \\ 2+k \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

をみたす行列 L を求めなさい。

問題 4.7.

$$f \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

と $(R, t) \in \mathbb{R}^2$ に対して、 $Df|_{(R, t)}$ を求めなさい。

問題 4.8.

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix}$$

と $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ($a \neq 0$) に対して、 $Df|_{(a, b)}$ を求めなさい。