微分積分学概論 AI 要約 NO.1

本講義の目的：$\boxed{\text{極限と連続性の詳論}}$

高校までの数学が「料理を味わう勉強」とするなら、この講義での数学は「料理を作る勉強」である。料理を作ると言っても、「野菜を畑で作る」とか「魚を養殖する (釣って来る)」ところから始めると大変なので、ある程度は出来合いのものをもちいる。他方で、「レトルトを温めておしまい」では料理とはよべない。少なくともそれで料理が上手くなることはないだろう。

「料理」のプロセスのうち、どこを学んでいるのかを意識しながら学ぶことが大事である。

◎この講義で用いて良いもの (材料): 整数、有理数、実数の、和、差、積、商、等号、不等号。 ◎この講義で作るもの (料理): 極限、収束、連続。

第一回目の主題：$\boxed{\text{数学の表記法}}$

定義 1.1. 以下この講義では次のような記号を用いる。

(1) $\mathbb{Z}$: 整数全体のなす集合。
(2) $\mathbb{Q}$: 有理数全体のなす集合。
(3) $\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合。
(4) $\mathbb{C}$: 複素数全体のなす集合。

◎集合と、その元との区別が大事。「実数の集合を一つ考える。」というのと、「実数を一つ考える。」というのをよく意識して区別すること。

1.1. 写像、全射、単射、全単射.

定義 1.2. (“1.1.4”) 集合 X から Y への写像 f が与えられているとは、X の各元 x に対して、それに対応する元が (“正しく計算すれば誰でも同じ答えが得られるように”) 与えられているときにいう。

f が**単射**であるとは、X の相異なる元 x_1, x_2 にたいしてはいつでも $f(x_1) \neq f(x_2)$ がなりたつときにいう。

f が**全射**であるとは、Y のどの元 y にたいしても、X のある元 x があって、$f(x) = y$ がなりたつときにいう。

1.2. 実数の集合の例、上限、上界.

定義 1.3. (“1.1.3”) 実数 a, b について、閉区間 $[a, b]$ と開区間 (a, b) をつぎの式で定める。

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

◎ $[a, b]$ には端点があって、そこでのようすは $[a, b]$ のほかの点のようすと大きく異っている。それに対して、(a, b) の各点はどの点も似ている。

定義 1.4. (“1.1.2”) $\mathbb{R}$ の部分集合 A が与えられているとする。 このとき

(1) $a \in \mathbb{R}$ が A の**上界** (upper bound) であるとは、

$$\forall x \in A (x \leq a)$$

(つまり、どの $x \in A$ をもってきても $x \leq a$) が成り立つときに言う。

(2) $a \in \mathbb{R}$ が A の**上限** (supremum) であるとは、A の上界のうち最小のものをいう。

◎ 集合の上界は存在するとは限らない。また、上界が存在したとすると、それはいくつもある。

例 1.5. $T = \{$ 土佐電鉄の運賃 $\} = \{100, 180, 190, 260, 340, 380, 400, 440, 470, 500\}$ とおく。このとき、

(1) T の上界としては、1000 がある。これは「土佐電鉄に乗るときは1000円あればお金が足りないことはない」ことを意味している。
(2) T の上界としては、他にも 500, 一万、十万、951.777.. 等がある。
(3) T の上限は 500 である。

例 1.6. (最大値を持たないが上限を持つ集合たち)

(1) $\{\frac{n-1}{n}; n = 1, 2, 3, \dots\}$ は上限 1 をもつ。
(2) $\{x \in \mathbb{R}; x < 2\}$ は上限 2 を持つ。
(3) $\{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\}$ は上限 $\sqrt{2}$ を持つ。

定義 1.7. ("1.1.2") 集合 $A \subset \mathbb{R}$ が**上に有界**であるとは、A が上界を少なくとも一つもつときに言う。

次の定理は実数の基本的な性質である。次回以降詳しく解説する。

定理 1.8. ("定理 1.1") $\mathbb{R}$ の部分集合 A で、上に有界なものは、必ず上限を唯一つもつ。

例題 1.9.

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x^3 - 25x < 0\}$$

は上界をもつだろうか、もつ場合には上界を一つ挙げてその理由を説明し、もたない場合にはもたないことの理由を説明せよ。

(解答)

$$S = (-\infty, -5) \cup (0, 5)$$

である。したがって、 S は上界 10 をもち、上に有界である。

上界は一つ挙げれば十分である。上の例題なら 5 (上限) でも良いし、100 でもよい。下の「問題」のように S が具体的に分かりにくい場合には、つぎのような別解が参考になる。

(別解) まず、$M = 100$ とおくと、S の元 s は $s \leq M$ を満たす。なぜなら、もし $s > M$ なる $s \in S$ が存在したとすると、

$$s^3 - 25s = s^2 \cdot s - 25s > 10000 \cdot s - 25 \cdot s = 9975s > 0$$

となって、これは $s \in S$ に反する。

したがって、S のどの元も、M 以下である。すなわち、M は S の上界の一つである。

旅行に行くとき、かかる旅費をキッチリ計算して、その分のお金しか持って行かない人は少なかろう。「大体△万円あれば十分」とか見積もる。これが上界の考え方。

問題 1.1.

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5 < 0\}$$

は上界をもつだろうか、もつ場合には上界を一つ挙げてその理由を説明し、もたない場合にはもたないことの理由を説明せよ。