関数の連続性の定義

定義 9.1. f は実数 a の近くで定義された関数であるとする。このとき、f が a で連続であるとは、

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

がなりたつときにいう。

極限の定義により、上の定義は次のように言い換えられる。

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0; (0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon)$$

$x = a$ の場合を考慮に加えると、次のような定理がなりたつことがわかる。

定理 9.2. f は実数 a の近くで定義された関数であるとする。このとき、f が a で連続であることは、次の条件と同値である。

$$(☆)\ \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0; (|x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon)$$

上の定義で、$|x-a|$ は x と a の距離、$|f(x)-f(a)|$ は $f(x)$ と $f(a)$ の距離であることに注意する。上の定理による連続性の「定義」は多変数関数や、距離空間のあいだの写像の連続性の定義にそのまま一般化することができる。

上の定理は「定理」ではあるが、連続性の定義における "$x = a$" の「例外的な扱い」を取り除いてむしろ自然な形をしている。そこで**この講義ではもっぱら連続性を確かめるには上の定理の (☆) で判定する**ことにする。

例題 9.3. $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f(x) : x \to x^2$ にたいして、

(1)
$$|x-\sqrt{2}| < \delta \implies |f(x)-f(\sqrt{2})| < 0.1$$
を満たす正の数 δ の例を挙げ、実際にそれがなりたつことを確かめなさい。

(2)
$$|x-\sqrt{2}| < \delta \implies |f(x)-f(\sqrt{2})| < 0.01$$
を満たす正の数 δ の例を挙げ、実際にそれがなりたつことを確かめなさい。

(3) $f(x)$ は $x = \sqrt{2}$ で連続であることを (☆) を確かめることにより証明しなさい。

(☆) の否定、すなわち、「f が a で連続でない」ことは、次のように書き表すことができる。

$$(★)\ \exists\epsilon > 0; \forall\delta > 0\ (|x-a| < \delta \text{ かつ } |f(x)-f(a)| \geq \epsilon)$$

問題 9.1. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & (x \neq 0 \text{ のとき }) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき }) \end{cases}$$

で定義するとき、f は $x = 0$ で連続ではないことを証明しなさい。ただし、sin の $0, \pi, \frac{\pi}{2}$ での値や、sin が周期 2π の周期関数であることを自由に使って良いものとする。

問題 7.1 解答解説。

・まず補題 7.2, 定理 7.3 すなわち、「$\{a_n\}$ がある数 c に収束するということと、$\{a_n\}$ がコーシー列であるということは同値である」を用いて解答するのを初級編としておいておけば良かったかも知れない。

・二重矢印 A $\Longrightarrow$ B は「A ならばいつでも B が成り立つ」の意味にしか使わない。

◎状況をできるだけ具体的にイメージすることが解答への近道である。そのためにはいくつか例を挙げてみるのも良い。(ただし、例だけでは証明にはならないことも知っておくこと。)

問題 7.1(1) の解答 (初級編)。

$\{a_n\}$ はコーシー列なので、ある実数 c に収束する。(定理 7.3) ところが、仮定により、$c \neq 0$ であることがわかる。

「収束の定義にでて来る ϵ」として $|c|/2$ をとると、

$$\exists N > 0 \quad (n > N \Longrightarrow |a_n - c| < |c|/2)$$

がわかる。この N より大きい任意の整数 n に対して、

$$|c| \leq |c - a_n + a_n| \leq |c - a_n| + |a_n| < |c|/2 + |a_n|$$

すなわち、$|a_n| > |c|/2$ がわかる。ゆえに、N_1 として上の N, r として $|c|/2$ をとればよい。

問題 7.1(1) の解答。背理法で, 結論の否定、すなわち

(※) $$\forall r > 0 \forall N_1 \in \mathbb{Z}_{>0} \exists n \in \mathbb{Z} (n > N_1 \text{ and } |a_n| < r)$$

を仮定する。このとき a_n は実は 0 に収束することを今から証明しよう。任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある N が存在して、

(あ) $$n, m > N \Longrightarrow |a_n - a_m| < \epsilon/2$$

がなりたつ。

上の式 (※) の r として $\epsilon/2$, N_1 として N をとることにより、ある n_0 が存在して、

(い) $$n_0 > N \text{ and } |a_{n_0}| < \epsilon/2$$

が成り立つことがわかる。(あ) と (い) を組み合わせると、

$$m > N \Longrightarrow |a_m| = |a_m - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_m - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < \epsilon$$

が結論される。つまり、$\{a_n\}$ は 0 に収束する。

ところが、仮定で、$\{a_n\}$ は 0 に収束しないとしたわけだから、これは矛盾である。 □

問題 7.1 (2) の解答。(まず始めに $\{b_j\}$ をつくることが肝要。)

(1) のような N_1 を一つ選んで

$$b_j = \begin{cases} 0 & (j \leq N_1 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{a_j} & (j > N_1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する。任意の $\epsilon > 0$ にたいして、 (ϵ の値の如何に関係なく) 上の N_1 をとると、$n > N_1$ なる任意の整数 n にたいして、

$$|a_n b_n - 1| = |1 - 1| = 0$$

となる。すなわち、 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1.$