

今日のテーマ 《多変数関数》

本講義では多変数の関数の扱い方、とくに極限と微分について講述する。教科書には二変数関数を中心に書かれているが、考え方は変数が増えても同じである。

定義 1.1. 一般に、正の整数 n に対して、

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n); a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

を、(実) n 次元空間と呼ぶ。(2次元空間のことを平面、3次元空間のことを単に空間と呼ぶ。) \mathbb{R}^n の元を(親しみをこめて)点とよぶ。

高次元の空間について、非日常的だと思う人もいるかも知れないが、そうではない。それらは変数の空間として大事な意味を持つ。変数を多くもつ関数などというのはいくらでも出会うだろう。

定義 1.2. n を一つ固定する。このとき、

- (1) 二点 $P = (a_1, a_2, \dots, a_n), Q = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ にたいして、その距離を $d(P, Q) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (a_j - b_j)^2}$ で定義する。
- (2) \mathbb{R}^n の点 $P = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ を中心とする半径 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ の開球とは、

$$B_r(P) = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, P) < r\}$$

のことをいう。 $n = 1, n = 2$ のときの開球のことをそれぞれ開区間, 開円板ともいう。

一般に、 \mathbb{R}^n 全体で関数が定義されていることは少なく、 \mathbb{R}^n の部分集合 X のみで定義される場合がほとんどである。ところが極限、微分を論じる時には、考えている集合 X の「ハジッコ」での話がややこしい場合がある。そこで、ハジッコがない集合には特別な名前をつけて、それを愛用するのである。

命題 1.1. d は距離の公理をみたす。すなわち、

- (1) $d(P, Q) \geq 0$ であり、 $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.
- (2) $d(P, Q) = d(Q, P)$.
- (3) 任意の $P, Q, R \in \mathbb{R}^n$ にたいして、

$$d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$$

が成り立つ。(三角不等式)

上の命題の証明には内積の概念を用いるのが便利である。

補題 1.1. $u, v \in \mathbb{R}^n$ にたいして、それらの内積を $\langle u, v \rangle = \sum_j u_j v_j$ で定義する。このとき、

- (1) $\langle u, v \rangle$ は u, v について双線型である。
- (2) $\langle u, u \rangle$ は非負の実数である。その平方根を $\|u\|$ と書く。
- (3) $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
- (4) $d(P, Q) = \|P - Q\|$.

定義 1.3. \mathbb{R}^n の部分集合 U が開集合であるとは U の任意の点 $P \in U$ にたいして、ある正の実数 r が存在して、 $B_r(x) \subset U$ であるときという。一行で書くと:

$$U : \text{open} \Leftrightarrow (\forall x \in U \exists r \in \mathbb{R}_{>0} (B_r(x) \subset U)).$$

またもや \forall と \exists がでてきた。この講義でも大事になるので使い方をマスターして頂きたい。とくに、 x と r の登場の順番を気にして欲しい。

定義 1.4. \mathbb{R}^n の点列 $\{P_j; j = 1, 2, 3, \dots\}$ が点 Q に収束するとは、

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d(P, Q_j) = 0$$

のときにいう。 $\{P_j\}$ が Q に収束するとき、

$$P_j \rightarrow Q \quad (j \rightarrow \infty)$$

とか、 $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j = Q$ と書く。

つまり点列の極限を数(距離)の極限に帰着させているのである。数の極限は ϵ - N 法を用いて定義されることを思い出しておくこと。

補題 1.2. 点列の収束は、その各成分が収束することと同値である。

定義 1.5. \mathbb{R}^n の部分集合 K が閉集合であるとは、「 K に属する点からなる点列 $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ が \mathbb{R}^n の点 P に収束するなら、必ず P も K に属する」ときに言う。

定義 1.6. \mathbb{R}^n の部分集合 D が領域であるとは、 D 内の任意の二点 P, Q が D 内の折れ線で結べるときに言う。

定義 1.7. \mathbb{R}^n の部分集合 S が有界であるとは、ある $P \in \mathbb{R}^n$ とある正の実数 R があって、 S が $B_R(P)$ のなかにすっぽりと部分集合として含まれてしまうときに言う。

補題 1.3. \mathbb{R}^n の部分集合 S に対して、次の二条件は同値である。

- (1) S は閉集合である。
- (2) S の \mathbb{R}^n での補集合 $\complement S$ は開集合である。

例 1.1. \mathbb{R}^n において、

- (1) \mathbb{R}^n 自体は開集合であり、閉集合でもある。
- (2) 開球は開集合であるが、閉集合ではない。
- (3) $P \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ とにたいして、閉球

$$\overline{B}_r(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n; d(P, Q) \leq r\}$$

は閉集合であるが、開集合ではない。

例 1.2. (1) 半開区間 $(0, 1]$ は \mathbb{R} の開集合でも、閉集合でもない。

(2) $[0, 1] \times (0, 1)$ は \mathbb{R}^2 の開集合でも、閉集合でもない。

下の例のように、「開集合」「閉集合」は「どの集合のなかで考えるか」が大切である

例 1.3. \mathbb{R}^2 の“ x 軸” ($\{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$) を \mathbb{R} と同一視する。このとき $(0, 1)$ は \mathbb{R} の開集合であるが、 \mathbb{R}^2 の開集合ではない。

定義 1.8. 写像(関数) $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとき、 X のことを f の定義域(もしくは始集合)、 Y のことを f の終集合 $f(X)$ のことを f の値域とよぶのであった。 $X \times Y$ の部分集合

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$$

のことを f のグラフとよぶ。

※レポート問題

(期限: 次の講義の終了時まで。)

問題 1.1. 平面 \mathbb{R}^2 の部分集合 $\{(0, 0)\}$ (一点からなる集合) は開集合ではないことを示しなさい。