解析学 IA 試験問題

問題 15.1. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} e^{4x+y} \\ x+y \end{pmatrix}$$

により定義する。このとき、

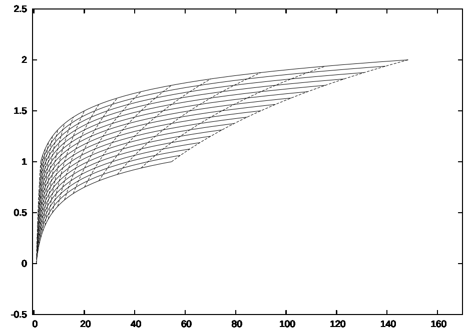
(1) 偏微分 f_x, f_y をそれぞれ求めなさい。

(2) 点 $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ における f の全微分 $Df|_P = Df(P)$ (どちらの書き方で書いても同じモノを意味する)、および その行列式 $\det(Df(P))$ を求めなさい。

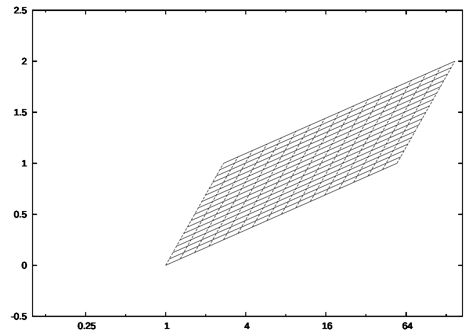
(3) 点 $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ における f の二次近似を求めなさい。

(4)
$$D = [0,1]\times[0,1]$$
とし、$D_1 = f(D)$ とおく。このとき、$\int_{D_1} u^{-1}dudv$ を
$$u(x,y) = e^{4x+y}$$
$$v(x,y) = x+y$$
と変数変換をすることにより求めなさい。(f により D の点と D_1 の点とが全単射で対応することは証明なしに自由に使ってよいことにする。)

ちなみに D_1 は次のような領域である。



横軸にだけ対数目盛をとると、こうなってきれいだ (アタリマエダ):



結果については理学部二号棟 6F 数学掲示板で行なう。採点等の処理は 3 日から一週間程度かかる予定。掲示までは成績についての質問には一切応じられない。

解答

(1)

$$f_x = \begin{pmatrix} 4e^{4x+y} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_y = \begin{pmatrix} e^{4x+y} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$Df(P) = \begin{pmatrix} 4e^{4a+b} & e^{4a+b} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって、その行列式は

$$\det(Df(P)) = 3e^{4a+b}$$

である。

(3)

$$f(\begin{pmatrix} a+h \\ b+k \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} e^{4a+b+4h+k} \\ a+b+h+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4a+b}e^{4h+k} \\ a+b+h+k \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{4a+b}(1+(4h+k)+\frac{1}{2}(4h+k)^2)+o(||\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}||^2)) \\ a+b+h+k \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{4a+b} \\ a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{4a+b}(4h+k) \\ h+k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{4a+b}(4h+k)^2 \\ 0 \end{pmatrix} + o(||\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}||^2))$$

「二次近似を求めよ」という本問題の答としてはこれで充分である。ただしもう少しだけキレイな書き方も以下に書いておこう。

$$f(\begin{pmatrix} a+h \\ b+k \end{pmatrix})$$
$$= \begin{pmatrix} e^{4a+b} \\ a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4e^{4a+b} & e^{4a+b} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{4a+b}(4h+k)^2 \\ 0 \end{pmatrix} + o(||\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}||^2))$$
$$= f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) + Df(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{4a+b}(4h+k)^2 \\ 0 \end{pmatrix} + o(||\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}||^2))$$

第一項 (定数項) は f の P での値であり、第二項 (一次の項) は、行列 $Df(P)$ により表現される。残念ながら、二次の項については、それほど簡便な書き方はない。(強いて言えば、「テンソル算」で書き表せる。) また、二次の項については今回の場合については上の形で充分簡単であるので、展開しても、しなくてもどちらでもよい。

なお、上の解答を見れば想像がつくように、(1) は (2) の Df の列ベクトルを見ればよい (逆に言えば、(2) の前半は (1) の答えを単に並べれば良い) し、(3) の一次の項を取り出せば、(1) および (2) の前半が自動的に得られる。

(4)

$$\int_{D_1} u^{-1} du dv = \int_D e^{-(4x+y)} \cdot (3e^{4x+y}) dx dy = 3\int_D dx dy = 3.$$

変数変換で気をつけなければならないのは、

(1) 領域の変換 (D_1 が D に。)
(2) 積分関数の変換 (u^{-1} が e^{4x+y} に。)
(3) 測度の変換 ($dudv$ が $3e^{4x+y}$ に。)

である。 D と D_1 が f で一対一に対応することは、log を用いて f の逆写像を構成することにより容易に示すことができる。興味のある者はやってみるとよい。