

今日のテーマ: 完全系列

定義 13.1. 環 A と、 A -加群 L, M, N が与えられているとする。このとき、

(1) A -加群の準同型 f, g を並べた「系列」

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

が完全系列 (exact sequence) であるとは、 $\text{Image}(f) = \text{Ker}(g)$ である時にいう。

(2) もっと長い A -加群の「系列」

$$\rightarrow M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \rightarrow$$

についても、これが完全系列 (exact sequence) であるということを $\text{Image}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$ が成り立つことで定義する。

補題 13.2. 環 A 上の任意の A -加群 L, M とその間の準同型 f にたいし、

(1) $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M$ が完全 $\Leftrightarrow f$ が単射。

(2) $L \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$ が完全 $\Leftrightarrow f$ が全射。

定義 13.3.

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

の形の完全列を短完全列とよぶ。

補題 13.4. A -加群の短完全列

$$(*) \quad 0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

について、次は同値である。

(1) A -準同型写像 $\nu: N \rightarrow M$ で、 $g \circ \nu = \text{id}$ を満たすものが存在する。(このような ν のことを g の **section** と呼ぶ。

(2) M の部分加群 K で $M = f(L) \oplus K$ を満たすものが存在する。

(3) A -準同型写像 $\mu: M \rightarrow L$ で、 $\mu \circ f = \text{id}$ を満たすものが存在する。(このような μ のことを f の **section** と呼ぶ。

定義 13.5. 上の補題の仮定のもとで、(1)-(3)のうちひとつ(したがって、全部)の条件が成り立つとき、(*) は分裂する (split) という。

線形代数学の知識ですぐわかるように、体上の短完全列は必ず分解する。他方、 \mathbb{Z} -加群の完全列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 3} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

は分裂しない。(体以外の) 大抵の環 A に対しては、このように分裂しない短完全列が存在するのだが、下記のような例外もある。

定理 13.6 (マシユケの定理 (を加群の言葉で述べたもの)). 体 k と有限群 G が与えられていて、 G の位数 g と k の標数 p とは互いに素であると仮定する。このとき、 $k[G]$ -加群の短完全列 ($A = k[G]$ のときの (*)) は必ず分裂する。

証明は g の k -加群としての section を G の作用でもって「平均を取る」ことにより得られる。

問題 13.1. 有限群 G にたいして、 $\Psi: \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}$ を、 $\Psi(\sum_g a_g \cdot g) = \sum_g a_g$ で定める。

(1) Ψ は $\mathbb{C}[G]$ -加群の準同型であることを示しなさい。ただし、 \mathbb{C} には G は自明に作用する (すなわち、 $g \cdot c = c \quad \forall g \in G \forall c \in \mathbb{C}$) ものとする。

(2) Ψ の核を K と置く。このとき、 $\mathbb{C}[G]$ -加群の短完全列

$$(**) \quad 0 \rightarrow K \rightarrow \mathbb{C}[G] \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C} \rightarrow 0$$

の分裂を与えるような Ψ の section $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}[G]$ をひとつ与えよ。(わかりにくい場合には $G = C_3$ の場合のみに解答を書いても良い)