

ガロア対応の例

例 13.1. (11.4 の再掲) $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{11}, \omega)$, $K = \mathbb{Q}$. (但し $\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$). L は K のガロア拡大である。ガロア群 $G = \text{Gal}(L/K)$ の生成元としては

$$a: \begin{cases} \sqrt[3]{11} & \mapsto \sqrt[3]{11}\omega \\ \omega & \mapsto \omega \end{cases}, \quad b: \begin{cases} \sqrt[3]{11} & \mapsto \sqrt[3]{11} \\ \omega & \mapsto \omega^2 \end{cases}$$

で定義される a, b がとれて、

$$a^3 = e, \quad b^2 = e, \quad b^{-1}ab = a^{-1}.$$

を満たす。ゆえに、

$$G = \text{Gal}(L/K) \cong \mathfrak{S}_3 \quad (3 \text{ 次の対称群}).$$

G の部分群は G と $\{e\}$ のほかに:

- 位数 2 のもの 3 つ。 ($\{e, b\}$, $\{e, ab\}$, $\{e, a^2b\}$).
- 位数 3 のもの 1 つ ($\{e, a, a^2\}$).

それらに対応する中間体は

- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{11}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{11}\omega^2), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{11}\omega)$.
- $\mathbb{Q}(\omega)$.

例 13.2. $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)$, $K = \mathbb{Q}$. (但し $i = \sqrt{-1}$.) L は K のガロア拡大である。ガロア群 $G = \text{Gal}(L/K)$ の生成元としては

$$a: \begin{cases} \sqrt[4]{3} & \mapsto \sqrt[4]{3}i \\ i & \mapsto i \end{cases}, \quad b: \begin{cases} \sqrt[4]{3} & \mapsto \sqrt[4]{3} \\ i & \mapsto -i \end{cases}$$

で定義される a, b がとれて、

$$a^4 = e, \quad b^2 = e, \quad b^{-1}ab = a^{-1}.$$

を満たす。ゆえに、

$$G = \text{Gal}(L/K) \cong \mathbb{D}_4 \quad (\text{二面体群})$$

G の部分群は G と $\{e\}$ のほかに:

- 位数 2 のもの 5 つ。 ($\{e, a^2\}$, $\{e, b\}$, $\{e, ab\}$, $\{e, a^2b\}$, $\{e, a^3b\}$).
- 位数 4 のもの 3 つ。 ($\{e, a, a^2, a^3\}$, $\{e, a^2, b, a^2b\}$, $\{e, a^2, ab, a^3b\}$).

それらに対応する中間体は

- $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i), \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}), \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}i), \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}(1+i)), \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}(1-i))$.
- $\mathbb{Q}(i), \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$.

問題 13.1. $\zeta_5 = \cos(2\pi/5) + \sqrt{-1}\sin(2\pi/5)$ とおく (1 の 5 乗根)。 $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \zeta_5)$ と \mathbb{Q} のあいだの中間体で、 \mathbb{Q} 上拡大次数が 5 のものを 2 つ以上求めよ。