指数関数

定理 14.1. 正の数 a にたいして、

$$\mathbb{Q} \ni q \mapsto a^q \in \mathbb{R}$$

は $\mathbb{R}$ 上の連続関数に拡張されて $a > 1$ ならば単調増加、$a < 1$ ならば単調減少、$a = 1$ なら定数関数になる。$x \in \mathbb{R}$ におけるこの関数の値を a^x と書く。

Proof. $x \in \mathbb{R}$ にたいして、x に収束する有理数列 $\{q_j\}$ をとり、$\{a^{q_j}\}$ を考えると、これはコーシー列であることがわかる。ゆえに、この列はある実数に収束する。じつはこの実数は x の近似列 $\{q_j\}$ の取り方によらないことがわかるから、これを a^x と書いて差し支えない。用意に分かるように $x \mapsto a^x$ は単調である。$x \to a^x$ が連続であることはレポート問題 12.1 の解答 (次ページ参照) と同様の方法により分かる。 □

e の定義を思い出しておこう。

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

定義 14.2. 指数関数 e^x の逆関数を $\log(x)$ で書き、x の自然対数とよぶ。

逆関数の定理により、$\log(x)$ は x の単調増加連続関数であることがわかる。
数学では断らない限り対数の底としては e をとり、自然対数を考えるのが普通である。

補題 14.3. $a^x = e^{x\log(a)}$.

定理 14.4. 次のことがなりたつ。

(1) $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.
(2) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.
(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$. ($\log(x)$ の微分の基本になる式)
(4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$. ($e^x$ の微分の基本になる式)

上の定理は e^x の $x \to 0$ の挙動を記述するものだが、$x \to \infty$ のときの挙動も大事である。

補題 14.5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$$

例題 14.6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x} = 0$$

を証明せよ。

問題 14.1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^7+x^5}{e^x} = 0$$

を証明せよ。

前回、$f, g : X \to \mathbb{R}$ が連続ならば $f + g : X \to \mathbb{R}$ や $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ も連続であることを証明 (復習) した。

このことは、つぎのようなことを使えば合成関数の連続性により証明できてスッキリする。

(1) $f, g : X \to \mathbb{R}$ が連続なら $(f, g) : X \ni x \mapsto (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2$ は連続。
(2) $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}$ は連続。
(3) $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x \cdot y \in \mathbb{R}$ は連続。

但し、これらは (解析学 I で習う予定の) 多変数関数の連続性の議論を必要とする。

問題 12.1 解答。任意の $\epsilon > 0$ に対して、$\epsilon_0 = \min(\epsilon, \frac{1}{2})$ とおく。(ϵ の代わりに ϵ_0 を考えることによって、ϵ が大きい時の心配をしなくて済む。) $N = \lfloor \frac{1}{\epsilon_0} \rfloor + 1$ とおく。N は $\frac{1}{N} < \epsilon_0$ となるような整数である。そうしておいて、

$\boxed{\delta = \frac{1}{N} \text{ とおく。(“フォーマット” の肝心な部分。)}}$ q を $|q| < \delta$ を満たすような任意の有理数としよう。すなわち、

$$-\delta < q < \delta.$$

No.12 の講義中に述べたように、x が有理数の範囲では $x \mapsto 2^x$ は単調増加であるから、$q, \frac{1}{N}$ が有理数であることに注意して

$$2^{-\frac{1}{N}} = 2^{-\delta} < 2^q < 2^\delta = 2^{\frac{1}{N}}. \tag{14.1}$$

他方で、

$$2 \underset{\boxed{N \text{ の定義}}}{<} N\epsilon_0 \underset{\boxed{\text{二項定理}}}{<} (1 + \epsilon_0)^N.$$

(二項定理のところは数学的帰納法の議論で置き換えても良い。) ゆえに、N 乗根の単調性により、

$$2^{\frac{1}{N}} < 1 + \epsilon_0 \tag{14.2}$$

がわかる。また、両辺の逆数を取ると

$$2^{-\frac{1}{N}} > \frac{1}{1 + \epsilon_0} \underset{\boxed{\epsilon_0 < 1}}{>} 1 - \epsilon_0. \tag{14.3}$$

(後の不等式では $0 < \epsilon_0 < 1$ より $1 > 1 - \epsilon_0^2 = (1 + \epsilon_0)(1 - \epsilon_0)$ が従うことを用いている。)

(14.1), (14.2), (14.3) を組み合わせることにより、

$$-\epsilon_0 < 2^q - 1 < \epsilon_0$$

すなわち、

$$|2^q - 1| < \epsilon_0 \leq \epsilon$$

がわかる。 □