微分積分学概論 AI 要約 NO.16

第 16 回目:

問題 16.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^4$ により定める。このとき、以下の問に答えなさい。

(1) f は 任意の $a \in \mathbb{R}$ において連続であることを定義に従って示しなさい。

(2) f は $[-5, 5]$ において一様連続であることを定義に従って示しなさい。

解答

(1) 任意の正の数 $\epsilon > 0$ に対して、$\boxed{\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{4|a|^3+6|a|^2+4|a|+1})\text{ とおく。}}$

(この式の分数の方の分母に現れる $4|a|^3 + 6|a|^2 + 4|a| + 1$ は 1 以上だから割り算は常に実行できることにも注意しておく。)

$|x - a| < \delta$ なる任意の実数 x に対して、$t = x - a$ とおこう。

(ア)
$$|t| < 1$$

と

(イ)
$$|t| < \frac{\epsilon}{4|a|^3 + 6|a|^2 + 4|a| + 1}$$

という 2 つの式が成り立つことに注意しながら以下のように計算する。

$$|f(x) - f(a)| =$$
$$|f(a+t) - f(a)| = |(a+t)^4 - a^4|$$
$$\underset{\boxed{\text{二項定理}}}{=} |4a^3t + 6a^2t^2 + 4at^3 + t^4|$$
$$\underset{\boxed{\text{三角不等式}}}{\leq} |4a^3t| + |6a^2t^2| + |4at^3| + |t^4| = 4|a|^3|t| + 6|a|^2|t|^2 + 4|a||t|^3 + |t|^4$$
$$\underset{\boxed{\text{(ア)}}}{\leq} 4|a|^3|t| + 6|a|^2|t| + 4|a||t| + |t| = (4|a|^3 + 6|a|^2 + 4|a| + 1)|t|$$
$$\underset{\boxed{\text{(イ)}}}{\leq} \epsilon.$$

このことから f は a で連続であることが結論される。

(2)

任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{4 \cdot 5^3 + 6 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 1})(= \min(1, \frac{\epsilon}{(5+1)^4 - 5^4}) = \min(1, \frac{\epsilon}{671}))$$

とおく。すると、$|x - a| < \delta$ をみたすような任意の $x, a \in [-5, 5]$ に対して、(1) と同様に $t = x - a$ とおくと

$$|f(x) - f(a)| \underset{\boxed{\text{(1) と同様}}}{\leq} (4|a|^3 + 6|a|^2 + 4|a| + 1)|t| \underset{\boxed{a \in [-5,5],\text{ 下記注も参照}}}{\leq} 671|t| < \epsilon.$$

(注: この不等号の左辺は正の数ばかりを足していることに注意。当然、各項が大きいほど大きくなるので、$|a|^3, |a|^2, |a|$ をそれぞれ $5^3, 5^2, 5$ に置き換えたほうが大きくなる。)

このことから f は $[-5, 5]$ で一様連続であることが結論される。