

第 11 回目の主題： 写像による集合の像、逆像

定義 11.1. (再) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとき、

- (1) X の部分集合 A に対して、その f による像 (順像とも言う) $f(A)$ を

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

で定義する。

- (2) Y の部分集合 B に対して、その f による逆像 $f^{-1}(B)$ を

$$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

により定義する。

$f(A)$ は、「 A の元を f で送ったモノの全体」、 $f^{-1}(B)$ は「 f で送って B に入るモノの全体」と唱える癖をつけておくと扱い易い。

問題 11.1. (再) $f: \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ に対して、

- (1) $f([1, 2])$ を求めよ。
- (2) $f([-3, -1])$ を求めよ。
- (3) $f([2, 4] \cup [-3, -1])$ を求めよ。
- (4) $f([2, 4]) \cap f([-3, -1])$ を求めよ。
- (5) $f([2, 4] \cap [-3, -1])$ を求めよ。

問題 11.2. $f: \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ に対して、

- (1) $f^{-1}([1, 2])$ を求めよ。
- (2) $f^{-1}(\{1\})$ を求めよ。
- (3) $f^{-1}(\{2\})$ を求めよ。
- (4) $f^{-1}(\{-1\})$ を求めよ。
- (5) $f^{-1}([-2, -1])$ を求めよ。
- (6) $f^{-1}([1, 2] \cup [3, 4])$ を求めよ。

f^{-1} は (見かけによらず) 集合論的には使いやすい。つまり、 f^{-1} はさまざまな集合算と可換である。

問題 11.3. 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、次のことを示しなさい。

- (1) 任意の $A_1, A_2 \subset Y$ に対して、 $f^{-1}(A_1 \cap A_2) = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2)$.
- (2) 任意の $A_1, A_2 \subset Y$ に対して、 $f^{-1}(A_1 \cup A_2) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$.
- (3) 任意の $A \subset Y$ に対して、 $f^{-1}(\mathbb{C}A) = \mathbb{C}(f^{-1}(A))$.
- (4) Y の無限個の部分集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda), \quad f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda).$$

問題 11.1 で見たように、 f の像については逆像ほどなんでもアリ (良い性質をもつ) というわけにはいかない。詳しくは集合論の本を見ればよいが、さしあたっては実例が現れた時にその都度考えるぐらいで十分だろう。

問題 11.4. $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow x \in \mathbb{R}$ にたいして、つぎの各問に答えよ。

- (1) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 5 \text{ and } |y| \leq 5\}$ にたいして、 $f(A_1)$ を求めよ。
- (2) $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x - 5| \leq 5 \text{ and } |y - 10| \leq 5\}$ にたいして、 $f(A_2)$ を求めよ。
- (3) $f(A_1 \cap A_2)$ を求めよ。
- (4) $f(A_1) \cap f(A_2)$ を求めよ。
- (5) $f(A_1 \cup A_2)$ を求めよ。

問題 11.5. $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow x \in \mathbb{R}$ にたいして、

- (1) $f^{-1}(\{0\})$ を求めよ。
- (2) $f^{-1}(\{-3\})$ を求めよ。
- (3) $f^{-1}([1, 5])$ を求めよ。
- (4) $f^{-1}([3, 4])$ をもとめよ。