論理と集合要約 NO.12

第 12 回目の主題： $\boxed{\text{写像は定義域の元を類別する。}}$

定義 12.1. (再) 写像 $f: X \to Y$ が与えられているとき、

(1) X の部分集合 A に対して、その f による**像** (**順像**とも言う) $f(A)$ を
$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$
で定義する。

(2) Y の部分集合 B に対して、その f による**逆像** $\overset{-1}{f}(B)$ を
$$\overset{-1}{f}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}$$
により定義する。

問題 12.1. (再) $f: \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to x \in \mathbb{R}$ にたいして、

(1) $\overset{-1}{f}(\{0\})$ を求めよ。
(2) $\overset{-1}{f}(\{-3\})$ を求めよ。
(3) $\overset{-1}{f}([1, 5])$ を求めよ。
(4) $\overset{-1}{f}([3, 4])$ をもとめよ。

一般に、写像 $f: X \to Y$ が与えられると、X の元は f の値によってクラス分けされる。

問題 12.2. $f: X \to Y$ が与えられているとし、$y \in Y$ に対して、$\overset{-1}{f}(\{y\})$ のことを X_y と書くことにする。次のことを示しなさい。

(1) X は $\{X_y\}_{y \in Y}$ の和集合である。
(2) $y \in Y$ に対して、$\overset{-1}{f}(\{y\}) \neq \emptyset \Leftrightarrow y \in f(Y)$.
(3) $X_y \cap X_{y'} \neq \emptyset \Leftrightarrow X_y = X_{y'}$.

X_y のなかで、重複するものを省くことにより、X の下の意味でのクラス分けを作ることができる。(厳密には選択公理を仮定する必要がある。)

定義 12.2. 集合 X の部分集合の族 $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が X の**クラス分け** (**分割**とも言う) であるとは、つぎのことが成り立つときに言う。

(1) $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = X$.
(2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば $C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2} = \emptyset$.

◎クラス分けと同値関係。

クラス分けは、「クラス分けの表を書く」ことにより定義することができる。ただし、次のような難点がある。

(1) 表は一般には無限個の元からなり、書くのが大変である。(全部を書ききるのは不可能である。)
(2) X の元 x_1, x_2 が同じクラスかどうか見るのに、いちいちクラス分けの表を見てから考えるのは面倒である。

そこで、クラス分けを定める別の方法を説明しよう。「$x, x' \in X$ が同じクラスであるか同じクラスでないかのみを判定するマシン」が与えられているところを想像すると良い。

定義 12.3. X の 2 つの元 x, y にたいして、$x \sim y$ か、そうでない $(x \not\sim y)$ かがきちんと定まっていて、次の性質を持つとき、$\sim$ のことを X 上の**同値関係**という。

(1) $\forall x \in X \forall y \in X \forall z \in X$ (「$x \sim y$ and $y \sim z$」 $\implies$ $x \sim z$).
(2) $\forall x \in X$ $(x \sim x)$.
(3) $\forall x \in X \forall y \in X$ $(x \sim y \implies y \sim x)$.

「同値関係」と、論理で言うところの「同値」とは (遠縁の親戚ぐらいにはあたるが)、別物である。よく区別すること。

問題 12.3. X のクラス分け $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき、$x \sim x'$ であることを

$$\exists\lambda(x \in C_\lambda \text{ and } x' \in C_\lambda)$$

か否かで判定すれば、この $\sim$ は同値関係であることを示しなさい。

問題 12.4. X に同値関係 $\sim$ が与えられているとき、$x \in X$ に対して、

$$C_x = \{x' \in X; x' \sim x\}$$

とおくとき、次のことを示しなさい。

(1) $x \in C_x$. とくに、$\displaystyle\bigcup_{x\in X} C_x = X$.
(2) $x' \in C_x \implies x \in C_{x'}$.
(3) $C_x \cap C_{x'} \neq \emptyset \Leftrightarrow x \sim x' \Leftrightarrow C_x = C_{x'}$.

先ほどと同様に、C_x のなかから重複するものを省くことにより、X のクラス分けを得ることができる。容易に分かるように、上記 2 問題の操作は互いに逆になっている。すなわち、クラス分けを与えることとと同値関係を与えることは本質的に同じ事である。

問題 12.5. 写像 $f : X \to Y$ が与えられているとき、$x \sim_f x'$ か否かの判定を $f(x) = f(x')$ か否かでするとき、すなわち、

$$x \sim_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$$

と定めるとき、$\sim_f$ は X の同値関係であることを定義に従って示しなさい。

「ホテルヒルベルト」的な表現をしてみよう。写像 f により、X のそれぞれのヒトはホテル Y のある部屋に入る。$x_1 \sim_f x_2$ とは、x_1 さんと x_2 さんが同じ部屋に泊まることを意味する。入る部屋によって X のクラス分けが行われるというわけである。

問題 12.6. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $f(n) = n^2$ で定義するとき、

(1) $1 \sim_f n$ となるような $n \in \mathbb{Z}$ をすべて求めなさい。
(2) $\mathbb{Z}$ の $\sim_f$ に関するクラス分けの表を書きなさい。

問題 12.7. $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x \in \mathbb{R}$ に対して、

(1) $(1, 0) \sim_f (1, 5)$ であることを示しなさい。
(2) $(1, 0) \not\sim_f (2, 5)$ であることを示しなさい。
(3) $(1, 0) \sim_f (a, b)$ となるような $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めなさい。

問題 12.8. $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$ に対して、

(1) $(1, 0) \sim_f (0, -1)$ であることを示しなさい。
(2) $(1, 0) \not\sim_f (2, 5)$ であることを示しなさい。
(3) $(1, 0) \sim_f (a, b)$ となるような $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めなさい。