

代数学 IA 演習問題 NO.7

剰余集合編

G を群、 H をその部分群とする。このとき、 G に、次のようにして同値関係 \equiv_H が定まります。

$$x \equiv_H y \Leftrightarrow \text{ある } h \in H \text{ があって、} xh = y \text{ が成り立つ。}$$

この同値関係は群論においてはとくに重要なので、記号 $x \equiv_H y$ の代わりに、

$$x \equiv y \pmod{H}$$

と書いて、《 x は y と H を法として左合同である》と言う事にします。考えている部分群 H が明確なときには、「 \pmod{H} 」を書くのは省略して良いです。 x のクラス $C(x)$ を x の H を法とする左剰余類と言います。

定義 7.1. 上のように決めた同値関係 $\equiv \pmod{H}$ による G の商集合 G/\equiv を G/H と書き、 G の H による左剰余類集合という。

問題 7.1. \mathbb{Z} の部分群として、 $H = 55\mathbb{Z}$ を考えます。このとき、

$$x \equiv 12 \pmod{H}$$

となるような x の例を 5 つ答えなさい。(なお、答には正の数ばかりでなく負の数も入れること。)

定義 7.2. n 個のもの $1, 2, 3, \dots, n$ の置換全体は群になります。この群を n 次の対称群とよび、 \mathfrak{S}_n と書きます。

問題 7.2.

$$H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_3; \sigma(3) = 3\}$$

と置きます。

- (1) H の元を全て書き出さない。
- (2) H を法とする同値関係によって、 \mathfrak{S}_3 がどのようにクラス分けされるか、クラス分けの表をつくって示さない。
- (3) \mathfrak{S}_3 の元

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

が \mathfrak{S}_3 の単位元 e と H を法とする同値関係で同値になるのはいつか、 i, j, k を使って答えなさい。

問題 7.3. 前問で、 \mathfrak{S}_3 を \mathfrak{S}_4 に換えて、

$$H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_4; \sigma(4) = 4\}$$

と置きます。このとき前問と同様な問題に答えなさい。

問題 7.4. n を正の整数とします。

$$H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n; \sigma(n) = n\}$$

と置きます。

- (1) H は \mathfrak{S}_{n-1} と同一視できることを示さない。
- (2) \mathfrak{S}_n/H の元の個数を求めなさい。

問題 7.5. 有限巡回群 $C_n = \langle g_1; g_1^n = e \rangle$ について考えます。

- (1) C_{12} の、 $\{g_1^3\}$ によって生成される部分群 H_1 は何になるか、元を全て挙げるによりいいなさい。
- (2) C_{12} の、 $\{g_1^5\}$ によって生成される部分群 H_2 は何になるか、元を全て挙げるによりいいなさい。
- (3) C_{12} の、 $\{g_1^{10}\}$ によって生成される部分群 H_3 は何になるか、元を全て挙げるによりいいなさい。
- (4) $C_{12}/H?$ ($?=1,2,3$) の元の個数を求めなさい。

問題 7.6. $C_{20} = \langle g_1; g_1^{20} = e \rangle$ の、 $H = \langle \{g_1^4\} \rangle$ を法とする同値関係によるクラス分けを、クラス分けの表をつくって示しなさい。

問題 7.7. n, l を正の整数とします。 C_n の部分群 H を、 $H = \langle \{g_1^l\} \rangle$ により決めます。このとき、 H の元の個数と、左剰余類集合 C_n/H の元の個数を求めなさい。

問題 7.8. n を正の整数とします。

$$H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n; \sigma(n) = n \text{ かつ } \sigma(n-1) = n-1\}$$

と置きます。

- (1) H は \mathfrak{S}_{n-2} と同一視できることを示しなさい。
- (2) \mathfrak{S}_n の二元

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_{n-1} & j_n \end{pmatrix}$$

が H を法として同値なのはどのような時ですか？

- (3) \mathfrak{S}_n/H の元の個数を求めなさい。

問題 7.9. (1) $\mathbb{C}^\times = \{z \in \mathbb{C}; z \neq 0\}$ はかけ算に関して群になることを示しなさい。

- (2) $H = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ は \mathbb{C}^\times の部分群になることを示しなさい。
- (3) \mathbb{C}^\times は H を法としてどのようにクラス分けされるか、複素平面を利用して説明しなさい。

問題 7.10. (各 1) \mathfrak{S}_4 の部分群のうち、 $\{e\}$ や \mathfrak{S}_4 自身以外のものを挙げなさい。ただし、単なる文字の付け替えは同じものと見なす。

問題 7.11. (各 1) \mathfrak{S}_5 の部分群のうち、 $\{e\}$ や \mathfrak{S}_4 自身以外のものを挙げなさい。ただし、単なる文字の付け替えは同じものと見なす。