線形代数学概論 A NO.6 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 行列の演算。単位行列。ゼロ行列。

行列の計算 (和、差、積、スカラー倍) は普通の数を計算するのと同じように計算できる。

但し、次のことだけが通常の数と異なるので注意を要する。

(1) サイズに注意。
  (a) サイズの異なる行列の和や差は定義されない。
  (b) $k \times l$ 行列 A と $m \times n$ 行列 B との積 AB は $l = m$ のときのみ定義される。

(2) 行列の積は可換ではない。すなわち、行列 A と B にたいし、AB と BA は、一方が定義されるからと言って他方が定義されるとは限らないし、仮に両方が定義されている場合であっても $AB = BA$ とは限らない。

定義 6.1. ベクトル空間 V から同じベクトル空間への線形写像を線形変換という。行と列のサイズが同じであるような行列を正方行列という。

正の整数 n にたいして、$n \times n$ 行列の全体 $M_{n,n}(\mathbb{R})$ のことを、$M_n(\mathbb{R})$ と書く。 $M_n(\mathbb{R})$ の元同士はは、いつでも足したり、引いたり、掛けたりできる。

◎単位行列

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への恒等写像 id_V は線形写像である。対応する行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots 0 \\ & \dots & & \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 \end{pmatrix}$$

と、対角に 1 が並ぶ行列である。これを単位行列と言い、 E_n とか 1_n で書き表す。

◎ゼロ行列

$\mathbb{R}^n$ の任意の元 $\mathbf{v}$ にたいし、 $\mathbb{R}^m$ の元 $\mathbf{0}$ (ゼロベクトル) を対応する写像は線形写像である。対応する行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ & \dots & & \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 \end{pmatrix}$$

と、すべての成分が 0 であるような行列である。これをゼロ行列と言い、O とか $O_{m,n}$ で書き表す。

単位行列は 1 の、ゼロ行列は 0 の役割を果たす。

◎行列単位

ij 成分のみが 1 で、あとはすべて 0 であるような行列のことを、行列単位といい、E_{ij} で書き表す。

$$(a_{ij})_{ij} = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$$

$$E_{ij}\mathbf{e}_k = \begin{cases} \mathbf{e}_i & j=k \text{ のとき。} \\ \mathbf{0} & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

◎クロネッカーのデルタ。

次のような記号を用いると便利であることが多い。(**クロネッカーのデルタ**)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \text{ のとき。} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

これを用いると、

$$E = (\delta_{ij})_{ij}$$

$$E_{ij}\mathbf{e}_k = \delta_{jk}\mathbf{e}_i$$

と、場合分けをいちいち書かずに済む。

問題 6.1. (1) 3×3 行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を行列単位 E_{ij} の線形結合として書き表しなさい。

(2) 上の P に対して、

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix} P$$

を計算しなさい。