代数学 IA NO.11 要約

今日のテーマ

準同型定理の証明と準同型定理の応用 (II)

定理 11.1 (群の準同型定理)**.** 群 G から別の群 H への準同型写像 $\varphi : G \to H$ が与えられたとする。このとき、次が成り立つ。

(1) φ の像 $\operatorname{Image}\varphi$ は H の部分群である。
(2) φ の核 $N = \operatorname{Ker}\varphi$ は G の正規部分群である。
(3) 剰余群 G/N は $\operatorname{Image}\varphi$ と同型である。

証明の肝:
Step1. φ によるクラス分けは、$\operatorname{Ker}(\varphi)$ によるクラス分けと一致する。
Step2. $G/\operatorname{Ker}(\varphi)$ の群の構造は $\operatorname{Image}(\varphi)$ の群の構造と一致する。

例 11.1. 位数 $2n$ の二面体群 $\mathbb{D}_n = \langle a, b;\ a^n = e,\ b^2 = e,\ ab = ba^{-1} \rangle$ から $(\{\pm 1\}, \times)$ への写像 f を、

$$f(a^k b^l) = (-1)^l \quad (k \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{Z})$$

で定めると、これは全射準同型写像になり、f の核は $\langle a \rangle = \{a^k; k = 0, 1, \dots, n-1\}$ に一致する。ゆえに、$\langle a \rangle$ は $\mathbb{D}_n$ の正規部分群であり、

$$\mathbb{D}_n / \langle a \rangle \cong \{\pm 1\}$$

が成立することがわかる。

レポート問題

(I) (a) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ への写像 f を、 $f([x]_8) = [15x]_{20}$ で与えたとき、これがうまく定義されていることを示しなさい。
(b) f が群の準同型であることもを示しなさい。
(c) f の対応表を書いて f によるクラス分けが $\operatorname{Ker}(f)$ によるクラス分けに一致することを確かめなさい。