

写像を理解するときに、「ホテルヒルベルト」のような解釈もできるのでした。

この解釈では、全射は、「空き室がないこと」に対応し、単射は、「各部屋個室」(単射でないことは、相部屋が生じること)に対応するのです。

全射や単射の存在は、始集合と終集合の元の多さと関係しているのです。

第9回目の主題： 写像

定理 9.1 (再). 集合  $X, Y$  が与えられているとする。  $X$  のおのこの元  $x$  に対して  $Y$  のコピー  $Y_x$  を用意すれば、  $\{Y_x\}_{x \in X}$  はひとつの集合の族である。  $X$  から  $Y$  への写像  $f$  は

$$\prod_{x \in X} Y_x$$

の元  $(f(x))_{x \in X}$  と同一視される。すなわち、直積集合  $\prod_{x \in X} Y_x$  は  $X$  から  $Y$  への写像全体の集合と同一視できる。

定義 9.2 (再).  $X$  から  $Y$  への写像の全体のなす集合を  $Y^X$  と書く。これはまた

$$\text{Hom}_{\text{set}}(X, Y)$$

と書く場合もある。

公理 9.3 (再). (選択公理) 空でない集合ばかりからなる集合族  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  にたいして、  $\prod_\lambda X_\lambda$  は空ではない。言い換えると、無限個の空でない集合たち  $X_\lambda$  から、いっせいに一つずつ元を取り出すことが可能である。

写像の合成

定義 9.4. 写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $g: Y \rightarrow Z$  が与えられているとする。このとき、  $f, g$  の合成写像  $g \circ f: X \rightarrow Z$  を

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

で定義する。

次の命題は簡単ではあるが有用である。実用上はこのような命題があることだけ記憶しておいて、その都度頭の中で確かめるのがいいだろう。

命題 9.5. 写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $g: Y \rightarrow Z$  が与えられているとする。このとき、次がなりたつ。

- (1)  $f, g$  がともに単射ならば  $g \circ f$  も単射である。
- (2)  $f, g$  がともに全射ならば  $g \circ f$  も全射である。
- (3)  $f, g$  がともに全単射ならば  $g \circ f$  も全単射である。
- (4)  $g \circ f$  が単射ならば、  $f$  は単射である。
- (5)  $g \circ f$  が全射ならば、  $g$  は全射である。

定義 9.6. 集合  $X$  に対して、写像  $X \ni x \mapsto x \in X$  を  $X$  の恒等写像といい、  $\text{id}_X$  で表す。

命題 9.7. 集合  $X, Y$  と、写像  $f: X \rightarrow Y$  および  $g: Y \rightarrow X$  が与えられているとする。このとき次のことはすべて同値である。

- (1)  $f$  は全単射であって、  $g$  は  $f$  の逆写像である。
- (2)  $g \circ f = \text{id}_X$  かつ  $f \circ g = \text{id}_Y$ .
- (3)  $f$  は全射であって、  $g \circ f = \text{id}_X$ .
- (4)  $f$  は単射であって、  $f \circ g = \text{id}_Y$ .

上の命題も、(1) $\Leftrightarrow$ (2) 以外はその都度確認すれば良い。(1) $\Leftrightarrow$ (2) は特に重要である。

問題 9.1.  $X = \mathbb{R}_{\geq 0}, Y = \mathbb{R}$  とおく。写像  $f: X \ni x \mapsto x \in Y$  と  $g: Y \ni x \mapsto |x| \in X$  にたいして、

- (1)  $g \circ f = \text{id}_X$  であることを示しなさい。
- (2)  $f \circ g \neq \text{id}_Y$  であることを示しなさい。
- (3)  $f, g$  はそれぞれ全射、単射、全単射だろうか。

定義 9.8. 実数  $x$  に対して、 $x$  を超えないような整数のうち最大のものを  $\lfloor x \rfloor$  と書く (floor of  $x$  と読む。)。例えば、

$$\lfloor 3.14 \rfloor = 3, \quad \lfloor -3.14 \rfloor = -4,$$

である。また、任意の整数  $n$  に対して、 $\lfloor n \rfloor = n$  である。

一般に、実数  $x$  と整数  $n$  に対して、

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$$

にも注意しておこう。昔は  $\lfloor x \rfloor$  のことを  $[x]$  で書いて、「ガウス記号」と呼ぶことが多かったが、今や floor のほうが通りが良くなりつつあるようである。

問題 9.2.  $X = \mathbb{Z}$ ,  $Y = \mathbb{Z}$  とおく。写像  $f : X \ni x \rightarrow 2x \in Y$  と  $g : Y \ni x \rightarrow \lfloor x/2 \rfloor \in X$  にたいして、

- (1)  $g \circ f = \text{id}_X$  であることを示しなさい。
- (2)  $f \circ g \neq \text{id}_Y$  であることを示しなさい。
- (3)  $f, g$  はそれぞれ全射、単射、全単射だろうか。

問題 9.3.  $X = \mathbb{C}[t]$  (複素数係数の  $t$  を変数とする多項式の全体のなす集合),  $Y = \mathbb{C}[t]$  とおく。写像  $f : X \ni p \rightarrow \int_0^t p dt \in Y$  と  $g : Y \ni p \mapsto \frac{d}{dt} p \in X$  にたいして、

- (1)  $g \circ f = \text{id}_X$  であることを示しなさい。
- (2)  $f \circ g \neq \text{id}_Y$  であることを示しなさい。
- (3)  $f, g$  はそれぞれ全射、単射、全単射だろうか。