

第12回目の主題：写像は定義域の元を類別する。

一般に、写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられると、 X の元は f の値によってクラス分けされる。

命題 12.1. $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとし、 $y \in Y$ に対して、 $f^{-1}(\{y\})$ のことを X_y と書くことにすると、次のことが成り立つ。

- (1) X は $\{X_y\}_{y \in Y}$ の和集合である。
- (2) $y \in Y$ に対して、 $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \Leftrightarrow y \in f(Y)$.
- (3) $X_y \cap X_{y'} \neq \emptyset \Leftrightarrow (y = y' \text{ and } y \in f(Y))$.

X_y のなかで、空集合を省くことにより、 X の下の意味でのクラス分けを作ることができる。

定義 12.2. 集合 X の部分集合の族 $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が X のクラス分け (分割とも言う) であるとは、つぎのことが成り立つときに言う。

- (1) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = X$.
- (2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda, \lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば $C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2} = \emptyset$.

命題 12.3. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられた時、 f は X のクラス分けを与える。

問題 12.1. $X = \{1, 2, 3, \dots, 31\}$, $Y = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$, $f: X \rightarrow Y$ を $f(x) = (x \text{ を } 7 \text{ で割った余り})$ で定義するとき、

- (1) f は全射だろうか。単射だろうか。
- (2) X の f に関するクラス分けの表を書きなさい。

問題 12.2. $f: X = \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x \in \mathbb{R} = Y$ に対して、 f によるクラス分けを考えた時、

- (1) $(1, 0)$ と $(1, 5)$ とは同じクラスに入ることを示しなさい。
- (2) $(1, 0)$ と $(2, 5)$ とは同じクラスでないことを示しなさい。
- (3) $(1, 0)$ と同じクラスになるような $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めなさい。
- (4) X_0, X_2, X_{-1} を求めなさい。

問題 12.3. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 10^2\}$, $Y = \mathbb{R}$ とおく。 $f: X \ni (x, y) \mapsto x \in Y$ に対して、 f によるクラス分けを考えた時、

- (1) f は全射だろうか。単射だろうか。
- (2) $(1, 0)$ と $(1, 5)$ とは同じクラスに入ることを示しなさい。
- (3) $(1, 0)$ と $(2, 5)$ とは同じクラスでないことを示しなさい。
- (4) $(1, 0)$ と同じクラスになるような $(a, b) \in X$ をすべて求めなさい。
- (5) X_0, X_2, X_{-1} を図示しなさい。
- (6) X_{20} を求めなさい。

問題 12.4. $f: X = \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \in \mathbb{R} = Y$ に対して、

- (1) $(1, 0)$ と $(0, -1)$ とは同じクラスであることを示しなさい。
- (2) $(1, 0)$ と $(2, 5)$ とは違うクラスであることを示しなさい。
- (3) $(1, 0)$ と同じクラスになるような $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ をすべて求め、図示しなさい。
- (4) X_2, X_0 を求めなさい。