線形代数学概論 A NO.14 要約

今日のテーマ

復習ベクトル空間の**次元**という量を使って、今までのことを少し整理してみよう。

定義 14.1. ベクトル空間 V の**次元**とは、V のなかの一次独立な元の最大個数である。V の次元を $\dim(V)$ と書く。

$\mathbb{R}^d$ の基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \mathbf{e}_d$ は一次独立であるから、$\dim(\mathbb{R}^d) \geq d$ が分かる。逆に、つぎのことが行列の標準形の議論から分かる。

命題 14.1. $\mathbb{R}^d$ の $d+1$ 個以上のベクトルは必ず一次従属である。

よって、(当たり前に見えるが定義通に確かめようとすると自明ではない) つぎのことが成り立つ。

定理 14.2. $\mathbb{R}^d$ の次元はちょうど d である。

すでに述べたとおり (命題 12.2)、正則行列の d 個のベクトルは必ず一次独立であった。

逆に、つぎのことがわかる。

命題 14.3. d 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^d$ の一次独立な d 個のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d$ があったとする。このとき、それらを並べでできる行列

$$P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_d)$$

は正則行列である。

d 次元ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^d$ の d 個の一次独立な元を、V の**基底** と呼ぶ。基底を選ぶということは、V の座標をひとつ選ぶという事に相当する。基底という言葉を使うと、上のことは次のように整理される。

定理 14.4. d 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^d$ のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d$ が基底であることと、それらを並べてできる行列

$$P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_d)$$

が正則行列であることは同値である。

行列の階数という概念も、次元を用いて述べることができる。

命題 14.5. 行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ の階数とは、A の列ベクトルのうち、一次独立なももの最大個数であり、これはまた A の像

$$\mathrm{Image}(A) = \{A\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

の次元に等しい。

行列の両側変形による標準形は、つぎのことを教えてくれる。

定理 14.6 (次元定理)**.** $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ が決まっているとする。A を $V = \mathbb{R}^n$ から $W = \mathbb{R}^m$ への線形写像と考えよう。このとき、

$$\mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{Image}(A)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Ker}(A)).$$

つぎのことが出来れば一学期合格と言えるだろう。

(1) 上の定理が、どういうことを述べているか、分かる。
(2) 行列の両側変形が具体的に計算できる。
(3) 計算結果を上の定理と比べて解釈できる。