

第15回目の主題：復習。

問題 15.1. \mathbb{Z} における二項関係を $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 6\mathbb{Z}$ で定義する。このとき、

- (1) \sim は同値関係であることを示しなさい。
- (2) 以下この問題では、 $x \in \mathbb{Z}$ の \sim に関するクラスを $[x]$ と書く。1のクラス [1] に属する \mathbb{Z} の元をすべて答えなさい。
- (3) \mathbb{Z}/\sim から \mathbb{Z} への写像 f を、 $f([x]) = (x \text{ を } 3 \text{ で割った余り})$ で定義できるだろうか。
- (4) \mathbb{Z}/\sim から \mathbb{Z} への写像 f を、 $f([x]) = (x \text{ を } 4 \text{ で割った余り})$ で定義できるだろうか。

問題 15.2. \mathbb{Z} における二項関係を $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 12\mathbb{Z}$ で定義する。このとき、

- (1) \sim は同値関係であることを示しなさい。
- (2) 以下この問題では、 $x \in \mathbb{Z}$ の \sim に関するクラスを $[x]$ と書く。3のクラス [3] に属する \mathbb{Z} の元をすべて答えなさい。
- (3) \mathbb{Z}/\sim から \mathbb{Z} への写像 f を、 $f([x]) = (x \text{ を } 5 \text{ で割った余り})$ で定義できるだろうか。
- (4) \mathbb{Z}/\sim から \mathbb{Z} への写像 f を、 $f([x]) = (x \text{ を } 4 \text{ で割った余り})$ で定義できるだろうか。

例題 15.1. 命題 $P: \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (x < y \implies \exists z \in \mathbb{Z} (x < z \text{ and } z < y))$ について、

- (1) P の否定命題 ($\text{not } P$) を「not を使わずに」書きなさい。
- (2) P と $\text{not } P$ のうち、真であるのはどちらだろうか。

例題 15.2. 写像 $f: \mathbb{Z} \ni x \mapsto x^2 - 2x \in \mathbb{Z}$ に対して、

- (1) $f^{-1}(\{0\})$ を求めなさい。
- (2) $f^{-1}(\{1\})$ を求めなさい。
- (3) $f^{-1}(\{4, 5, 6\})$ を求めなさい。
- (4) f は単射だろうか。理由を挙げて答えなさい。
- (5) f は全射だろうか。理由を挙げて答えなさい。
- (6) f によって \mathbb{Z} に同値関係 \sim_f が

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

により定まる。この \sim_f により 3 と同値になる \mathbb{Z} の元をすべて求めなさい。

例題 15.3. 写像 $f: \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 - 2x \in \mathbb{R}$ に対して、

- (1) $f^{-1}(\{0\})$ を求めなさい。
- (2) $f^{-1}(\{1\})$ を求めなさい。
- (3) f は単射だろうか。理由を挙げて答えなさい。
- (4) f は全射だろうか。理由を挙げて答えなさい。
- (5) f によって \mathbb{R} に同値関係 \sim_f が

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

により定まる。この \sim_f により 3 と同値になる \mathbb{R} の元をすべて求めなさい。

例題 15.4. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとする。このとき

- (1) X の任意の部分集合 A, B について、 $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ が成り立つことを示しなさい。
- (2) X の任意の部分集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、 $f^{-1}(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$ が成り立つことを示しなさい。
- (3) X の任意の部分集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、 $f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$ が成り立つことを示しなさい。