微分積分学概論 AI 要約 NO.12

連続関数の性質

定理 12.1. (中間値の定理) (再) 関数 f が閉区間 $[a,b]$ で連続 (すなわち、$[a,b]$ の各点で連続) とする。このとき $f(a)$ と $f(b)$ の中間の値 γ にたいして、$f(c)=\gamma$ をみたすような $c \in [a,b]$ が存在する。

定理 12.2 (最大値の定理)**.** (再) 有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数は必ず最大値を持つ。

この定理は位相空間論においては「コンパクト集合の像はコンパクトである」という定理 (あるいはその系の「コンパクト集合上の連続関数は最大値を持つ」という定理) に一般化される。

問題 12.1.

(1) 閉区間 $[0,1]$ 上で定義された実数値連続関数 $f(x), g(x)$ が、任意の $x \in [0,1]$ にたいして $f(x) > g(x)$ をみたすとき、ある正の数 ϵ_0 が存在して、$f(x) \geq g(x) + \epsilon_0$ がすべての $x \in [0,1]$ に対して成り立つことを示しなさい。

(2) 上で、閉区間 $[0,1]$ のところを開区間 $(0,1)$ に置き換えた場合にはどのようなことが起こるだろうか。