微分積分学概論 AI 要約 NO.10

連続関数の性質

定義 10.1. $\mathbb{R}$ の部分集合 D 上で定義された f が D で連続であるとは、その定義域の全ての点 a で連続であること、すなわち、

$$\forall a \in D \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall x \in D \left(|x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon\right)$$

が成り立つときに言う。

上の定義は、D が開区間や閉区間に限らず、一般的に適用できる形で述べられている。詳しくは多変数の場合に譲ろう。

定理 10.2. 同じ定義域 D を持つ連続関数 f, g について、

(1) $\lambda f + \mu g$ も連続関数である。
(2) fg も連続関数である。
(3) D の部分集合 $D_0 = \{x \in D; g(x) \neq 0\}$ において、f/g も連続関数である。

系 10.3. (1) x の多項式で定義される関数 (多項式関数) は $\mathbb{R}$ で連続である。

(2) x の有理式で定義される関数

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad (p, q \text{ は } x \text{ の多項式})$$

(有理関数) は、$D_q = \{x \in \mathbb{R}; q(x) \neq 0\}$ で連続である。

上の定理は、下の定理の多変数版を用いるともっと鮮やかに証明される

定理 10.4. 二つの連続関数の合成関数は連続である。

次のことは、「連続 $\implies$ グラフがつながっている」ということの表現法の一つと言える。

定理 10.5 (中間値の定理)**.** 関数 f が閉区間 $[a, b]$ で連続 (すなわち、$[a, b]$ の各点で連続) とする。このとき $f(a)$ と $f(b)$ の中間の値 γ にたいして、$f(c) = \gamma$ をみたすような $c \in [a, b]$ が存在する。

上の定理は、位相空間論において「連結集合の連続像は連結である」という定理に一般化される。(区間は実数直線の連結部分集合として特徴づけることができる。)

問題 10.1.

$$f(x) = \frac{3x+5}{x}$$

とおくと、f は $D = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$ において連続であることを定義にしたがって (つまり定理 10.2 や系 10.3 に頼らずに) 証明しなさい。