代数学 IA NO.9 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 《正規部分群・剰余群・準同型》

定理 9.1. G を群、H をその部分群とする。G/H に次のような乗法を定めて群にしてやりたい。

$$\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$$

これが、代表元の取りかたによらずにうまくいって、G/H が実際に群になるためには、H が正規部分群である事が必要十分である。

実際には、「必要十分」のうち、「十分」のほうがよく用いられる。すなわち、

定理 9.2. G を群、N をその正規部分群とする。G/N は上の定理の乗法により群の構造をもつ。

定義 9.3. 上の定理で得られる群 G/N を、G の N による剰余群 (もしくは商群) とよぶ。

定義 9.4. G, H を群とする。G から H への写像 $f : G \to H$ が**群準同型**であるとは、任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して、

$$f(g_1 g_2) = f(g_1)f(g_2)$$

が成り立つときに言う。 準同型 f が全単射でもある時、f を同型と言う。

例 9.5. 準同型の例

(1) 任意の群 G に対して、G の上の恒等写像 $\mathrm{id} : G \to G$ は G から G への準同型である。これは全単射であるから、同型である。
(2) n を正の整数とする。$\mathbb{Z}$ から $n\mathbb{Z}$ への写像 f を、

$$f(k) = nk$$

により定めると、f は準同型である。これも同型である。
(3) n を正の整数とする。$\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への写像 f を、

$$f(k) = nk$$

で定めると、f は準同型である。これは $n > 1$ なら同型ではない。
(4) n を正の整数とする。$\mathbb{Z}$ から $C_n = \langle a; a^n = e \rangle$ を、

$$f(k) = a^k$$

で定めると、f は準同型である。これは同型ではない。
(5) $(\mathbb{Z}, +)$ から $(\mathbb{Q}^\times, \times))$ への写像 f を

$$f(k) = 2^k \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

で定義すると、f は準同型である。これは同型ではない。

例 9.6. (準同型でない例)

(1) $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への写像 $n \mapsto n^2$ は準同型ではない。
(2) $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への写像 $n \mapsto n + 1$ も準同型ではない。

これまで、群には演算、というデータのほかに、単位元、逆元の存在が基本的であると言ってきた。これらは準同型で自動的に保存される。次の定理でそのことを示そう。

定理 9.7. G, H を群とする。G から H への準同型写像 $f : G \to H$ に対して、次の事が成り立つ。

(1) f は単位元を単位元にうつす。すなわち、

$$f(e_G) = e_H. \quad (e_G, e_H \text{ はそれぞれ } G.H \text{ の単位元})$$

(2) f は逆元を逆元にうつす。すなわち、任意の G の元 g に対して、

$$f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$$

が成り立つ。

(3) 任意の整数 n と任意の G の元 g に対して、

$$f(g^n) = f(g)^n$$

が成り立つ。

- 準同型の核

定義 9.8. $f : G \to H$ を二つの群の間の準同型とする。f の核 (kernel) とは、H の単位元 e_H の f の逆像の事である。すなわち、

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(e_H) = \{g \in G; f(g) = e_H\}$$

準同型を調べよ、と言われたらとりあえずその核を調べる。核は次のような性質と役割をもつ。

定理 9.9. $f : G \to H$ を二つの群の間の準同型とする。このとき、f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ は G の正規部分群である。