

## 代数学 IA NO.11 要約

### 今日のテーマ 群の準同型定理

**定理 11.1** (群の準同型定理). 群  $G$  から別の群  $H$  への準同型写像  $\varphi: G \rightarrow H$  が与えられたとする。このとき、次が成り立つ。

- (1)  $\varphi$  の像  $\text{Image } \varphi$  は  $H$  の部分群である。
- (2)  $\varphi$  の核  $N = \text{Ker } \varphi$  は  $G$  の正規部分群である。
- (3) 剰余群  $G/N$  は  $\text{Image } \varphi$  と同型である。

証明の肝:

Step1.  $\varphi$  によるクラス分けは、 $\text{Ker}(\varphi)$  によるクラス分けと一致する。

Step2.  $G/\text{Ker}(\varphi)$  の群の構造は  $\text{Image}(\varphi)$  の群の構造と一致する。

**例 11.2.** 位数  $2n$  の二面体群  $\mathbb{D}_n = \langle a, b; a^n = e, b^2 = e, ab = ba^{-1} \rangle$  から  $(\{\pm 1\}, \times)$  への写像  $f$  を、

$$f(a^k b^l) = (-1)^l \quad (k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z})$$

で定めると、これは全射準同型写像になり、 $f$  の核は  $\langle a \rangle = \{a^k; k = 0, 1, \dots, n-1\}$  に一致する。ゆえに、 $\langle a \rangle$  は  $\mathbb{D}_n$  の正規部分群であり、

$$\mathbb{D}_n / \langle a \rangle \cong \{\pm 1\}$$

が成立することがわかる。

### 問題

- (I) (a)  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$  から  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  への写像  $f$  を、 $f([x]_{15}) = [x]_5$  で与えたとき、これがうまく定義されていることを示しなさい。
- (b)  $f$  が群の準同型であることも示しなさい。
- (c)  $f$  の対応表を書いて  $f$  によるクラス分けが  $\text{Ker}(f)$  によるクラス分けに一致することを確かめなさい。