

論理と集合要約 NO.12

写像 f があると定義域の集合は f の値によってクラス分けされるのでした。

第 12 回目の主題：クラス分けと同値関係

集合 X をクラス分けする際、「クラス分けの表」を書くのは面倒である。ほかの有効な手段として、「同値関係」を導入する方法がある。

問題 12.1. $X = \{1, 2, 3, \dots, 31\}$, $Y = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$, $f: X \rightarrow Y$ を $f(x) = (x \text{ を } 7 \text{ で割った余り})$ で定義するとき、

- (1) X の f に関するクラス分けの表を書きなさい。
- (2) 1 と同じクラスになる X の元をすべて書きなさい。
- (3) 2 と同じクラスになる X の元をすべて書きなさい。

一般に、集合 X にクラス分けが定まっているとき、 $x \in X$ と同じクラスの元全体の集合を $[x]$ とか \bar{x} と書く。(クラス分けがいろいろ出てきて区別が必要なときには、その都度 $[x]_1$ とか添字をつけて区別するのが良からう) 字面だけみると、面白いことが起こる。例えば、上の例では

$$[1] = [8](= [15])$$

等々。

クラスは、元来は集合であるが、これを一つの元と改めて思い直すことにより、 X のクラス全体の集合を考えることができる。これを X のこのクラス分けに関する商集合といい、 $X/(\text{クラス分け})$ と書く。上の例では、

$$X/(\text{クラス分け}) = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6]\}.$$

問題 12.2. 有限集合 $X = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ をいくつかの黒い線分で結ぶ。(ウラ面参照。) このとき、 X の点を「黒い線づたいにつなげるか否か」でクラス分けすることができる。このクラス分けの表を書き、 $X/(\text{クラス分け})$ の元の個数を書きなさい。

上の問題のように、「同じクラスか否か」のほうの方が先に分かっていたら、それをもとにクラス分けができる。これが同値関係の考え方である。

問題 12.3. $X = \{-10, -9, -8, \dots, 8, 9, 10\}$ (絶対値が 10 以下の整数) とする。このとき、

- (1) $|x| = |y|$ のとき (のみ) x と y が同じクラス、と決めることにより、 X をクラス分けしその表を書け。
- (2) $x - y$ が 3 の倍数のとき (のみ) x と y が同じクラス、と決めることにより、 X をクラス分けしその表を書け。
- (3) $x - y$ が 5 の倍数のとき (のみ) x と y が同じクラス、と決めることにより、 X をクラス分けしその表を書け。
- (4) $x \geq y$ のとき (のみ) x と y が同じクラス、と決めることにより、 X をクラス分けできるだろうか。
- (5) $xy \geq 0$ のとき (のみ) x と y が同じクラス、と決めることにより、 X をクラス分けできるだろうか。
- (6) $xy > 0$ のとき (のみ) x と y が同じクラス、と決めることにより、 X をクラス分けできるだろうか。

上で、 x と y が同じクラス、といちいち書くのは面倒である。そこで、 $x \sim y$ や $x \equiv y$ のような記号を用いて書くことが多い。いずれにしても、勝手な規則で「同じクラス」を定めようとしても、うまく行かない。

うまく行くために必要な事柄を集めたのが、同値関係である。

定義 12.1. \sim が集合 X の同値関係であるとは、次のことを満たすときにいう。

- (0) 任意の $a, b \in X$ に対して、 $a \sim b$ か、そうでないかがはっきりと決まっている。
- (1) (推移律) $a, b, c \in X$ が、 $a \sim b, b \sim c$ を満たせば、 $a \sim c$ も成り立っている。
- (2) (反射律) 任意の $a \in X$ に対して、 $a \sim a$ が成り立っている。
- (3) (対称律) $a, b \in X$ が、 $a \sim b$ を満たせば、 $b \sim a$ も成り立っている。

同値関係は、同じクラスかどうかの判定のルールがきちんと機能するためのルール(「ルールのルール」)である。

