

第 9 回目の主題: 復習

「P ならば Q」の否定は、「P かつ (not Q)」。

問題 真 9.1.

- (1) 「 $\forall x \in \mathbb{R} \ x > 3 \implies x > 5$ 」を日本語に直しなさい。
- (2) 「 $\forall x \in \mathbb{R} \ x > 3 \implies x > 5$ 」は正しいだろうか。
- (3) 「 $\forall x \in \mathbb{R} \ x > 3 \implies x > 5$ 」の否定を記号で書きなさい。
- (4) 「 $\forall x \in \mathbb{R} \ x > 3 \implies x > 5$ 」の否定を日本語に直して書きなさい。

問題 真 9.2 (6.3). 集合 X, Y, Z に対して、 $X \subset Y \implies Z \setminus X \supset Z \setminus Y$ を示しなさい。

問題 真 9.3. (6.4) 集合族 $\{A_i\}, \{B_i\}$ が与えられた時、包含関係

$$(\cup A_i) \setminus (\cup B_i) \subset \cup (A_i \setminus B_i)$$

および

$$(\cap A_i) \setminus (\cap B_i) \supset \cap (A_i \setminus B_i)$$

を示しなさい、

.....

定義 真 9.1. 集合 X, Y に対して、 $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ のことを X と Y の直積集合と呼ぶ。

定義 真 9.2 (7.3). 写像 $f : X \rightarrow Y$ に対してそのグラフを

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in X\} \subset X \times Y$$

で定義する。

例 9.3. [7.2] つぎの各々はそれぞれ (別々の) 写像である。(そのグラフは???)

- (1) $f_1 : \mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$
- (2) $f_2 : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$
- (3) $f_3 : \mathbb{R}_{>0} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$
- (4) $f_4 : \mathbb{R}_{>0} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_{>0}$
- (5) $f_5 : \mathbb{Z} \ni n \mapsto 2n \in \mathbb{R}$
- (6) $f_6 : \mathbb{Z} \ni n \mapsto 2n \in \mathbb{Z}$

.....

問題 真 9.4 (8.1). $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto 2x + 1 \in \mathbb{R}$ の逆写像を求めよ。

問題 真 9.5 (8.2). つぎのことをそれぞれ示しなさい。

- (1) $\mathbb{Z}_{>0}$ から $\mathbb{Z}_{>0} \setminus \{1\}$ への全単射が存在する。
- (2) \mathbb{Z} から $2\mathbb{Z}$ への全単射が存在する。
- (3) \mathbb{Z} から $\mathbb{Z}_{>0}$ への単射が存在する。
- (4) $\mathbb{Z}_{>0}^2$ から \mathbb{Z} への単射が存在する。
- (5) \mathbb{Z}^2 から \mathbb{Z} への単射が存在する。
- (6) 任意の整数 n にたいして、 \mathbb{Z}^n から \mathbb{Z} への単射が存在する。
- (7) \mathbb{Q} から \mathbb{Z} への単射が存在する。

定義 真 9.4. 写像 $f : X \rightarrow Y$ が与えられているとき、

- (1) X の部分集合 A に対して、その f による像 (順像とも言う) $f(A)$ を

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

で定義する。

- (2) Y の部分集合 B に対して、その f による逆像 $f^{-1}(B)$ を

$$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

により定義する。

逆写像と同じ記号 f^{-1} を使っているけれども、集合の逆像は f の逆写像が存在しない場合においても定義されるということに注意しておこう。

問題 真 9.6. $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ に対して、

- (1) $f(\{1, 2\})$ を求めよ。
- (2) $f(\{-3, 3, 5\})$ を求めよ。

問題 真 9.7. $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ に対して、

- (1) $f^{-1}([1, 2])$ を求めよ。
- (2) $f^{-1}(\{1\})$ を求めよ。
- (3) $f^{-1}(\{2\})$ を求めよ。
- (4) $f^{-1}(\{-1\})$ を求めよ。