代数学 III 要約 NO.3

今日のテーマ: $\boxed{\text{体に代数的な元を何個か付け加える}}$

一般に、複素数体 $\mathbb{C}$ や実数体 $\mathbb{R}$ 以外の体 K でも、線形代数で習ったはずのいろいろな事柄 (線形空間、基底とその取り換え、次元。線形写像とその行列表現など) がそのまま使えることに注意しておく。心配な人はここで少し復習しておくと良いかもしれない。

定義 3.1. K の 拡大体 L は K 上のベクトル空間の構造を持つ。そこで、 L の K-ベクトル空間としての次元のことを L の K 上の**拡大次数** といい、 $[L : K]$ で書き表す。$[L : K] < \infty$ のとき、L は K の**有限次拡大**であると言う。

次の命題は体の拡大次数の方程式論的な意味を明らかにする。

命題 3.2. 体 K の拡大体 L と L の元 α とが与えられているとする。このとき、

(1) $d = [K(\alpha) : K]$ が有限であることと、α が K 上代数的であることは同値である。
(2) $d < \infty$ なら、d は α の K 上の最小多項式の次数と等しい。

命題 3.3. (1) 体 K, L_1, L_2 が $K \subset L_1 \subset L_2$ をみたすならば拡大次数の間に

$$[L_2 : K] = [L_2 : L_1][L_1 : K]$$

という関係式が成り立つ。
(2) 体 K の有限次拡大体 L の元は全て K 上代数的である。

定理 3.4. 体 K と、その拡大体 L が与えられているとする。このとき、L の 元で、K 上代数的な元同士の和、差、積、商はまた K 上代数的である。つまり、L の元で K 上代数的なものの全体は体をなす。

定義 3.5. 体 K とその拡大体 L が与えられているとする。このとき L の元 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ を K に付け加えてできた体 (言い換えると K と $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ を含むような L の部分体のなかで、最小のもの) を $K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ と書く。(環 $K[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]$ との違いに注意。)

命題 3.6. 体 K とその拡大体 L が与えられているとする。このとき L の <u>代数的な</u> 元 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ について、次のことが成り立つ。

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ を K に付け加えてできた体 $K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ の元はどれも K 上代数的である。
(2)

$$K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = K[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]$$

補遺: 次のことは前回に述べるべきだったが、書いて置かなかったのでここに改めて書いておくことにする。(命題 2.5 の後あたりに配するのが妥当だったろう。)

命題 3.7. 体 K の拡大体 L と K 上の代数的な元 $\alpha \in L$ が与えられているとする。このとき、

(1) α の最小多項式 $f_0(X)$ は既約である。
(2) $f \in K[X]$ が $f(\alpha) = 0$ を満たすならば、 f は α の最小多項式 f_0 で割り切れる。

問題 3.1. $\alpha = \sqrt{2} + 7\sqrt[3]{5}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的であることを示しなさい。

上の問題は間接的な解答でも良いわけだが、直接的に答える、すなわち α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を実際に求めることもできる。例えば次のようにすれば良い。

問題 3.2. $\alpha = \sqrt{2} + 7\sqrt[3]{5}$ とおく。このとき、

(1) $(\alpha - \sqrt{2})^3 - 1715 = 0$ であることを示しなさい。
(2) $p(X) = ((X - \sqrt{2})^3 - 1715)((X + \sqrt{2})^3 - 1715)$ を展開し、それが $\mathbb{Q}[X]$ の元であることを確かめなさい。
(3) 上の p は $p(\alpha) = 0$ を満たすことを示しなさい。