代数学 II 要約 NO.3

第 3 回目の主題：

$\boxed{A\text{-加群の部分加群と剰余加群}}$

補題 3.1. 環 A と A-加群 M が与えられているとする。M の部分集合 S に対して、次のことは同値である。

(1) S を含む M の部分加群は M 自身しかない。

(2) $M = \{\sum_{\text{有限和}} r_i s_i; r_i \in A, s_i \in A\}$

定義 3.2. S がうえの補題の性質を満たすとき、「S は M を生成する」という。

補題 3.3. 環 A と A-加群 M, および M の A-部分加群 N が与えられているとする。このとき、剰余加群 M/N には A-加群の構造が自然に入る。

この M/N のことを M の N による剰余 A-加群という。

命題 3.4. 環 A と、A 上の行列 $(a_{ji})_{i\in I, j\in J}$ が与えられていて、次のような条件を満たすとする。
(条件): 各 $j \in J$ に対して、$a_{ji} \neq 0$ なる $i \in I$ はたかだか有限個しかない。

このとき、 A-加群 M とその元 $\{m_i\}_{i\in I}$ の組 $(M, \{m_i\})$ に関する次の条件を考える。

(Gen1) M は $\{m_i\}_{i\in I}$ で生成される。
(Gen2) 任意の $j \in J$ に対して、関係式 $\sum_i a_{ji} m_i = 0$ をみたす。

このとき、A-加群 M_0 とその生成元 $\{m_i^{(0)}\}$ で次のようなものが同型を除いてただひとつ存在する。

(1) $(M_0, \{m_i^{(0)}\}$ は (Gen1),(Gen2) をみたす。

(2) もし、$(M_1, \{m_i^{(1)}\}$ も (Gen1),(Gen2) を満たすとすると、M_0 から M_1 への A-準同型 φ であって、$\varphi(m_i^{(0)}) = m_i^{(1)}$ をみたすものが存在する。

注意 3.5. 上の (2) で、φ はただひとつ定まり、しかも全射であることがすぐに分かる。

定義 3.6. 上の命題で定まる M_0 のことを、関係式

$$\sum_j a_{ji} m_i = 0$$

で定義される A-加群と呼ぶ。

例 3.7. 体 K 上のベクトル空間 V は K-加群と同じである。V の部分ベクトル空間 W は K-部分加群と同じであり、剰余ベクトル空間 V/W の定義は K-剰余加群の定義と同じである。

例 3.8. $\mathbb{Z}$ 上の加群 $\mathbb{Z}$ の部分加群は、$\mathbb{Z}$ のイデアルと同じことであり、それは代数 IB で学んだとおり、$n\mathbb{Z}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$ のどれかに一致する。そこで剰余加群として $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が得られる。

例 3.9. $v_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とおき、$M = \mathbb{Z}^2$ の $\mathbb{Z}$-部分加群 $N = \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$ を考える。このとき

(1) N は v_1, v_2 で生成される M の $\mathbb{Z}$-部分加群である。

(2) $m = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \end{pmatrix}$ とおくと、 $m \in N$ である。$m = v_1 + v_2$ であるからである。

(3) M の基本ベクトル e_1, e_2 の M/N でのクラスを $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ と書くと、 $-5\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2 = 0$, $3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 = 0$ である。

(4) $-2\bar{e}_1 + 14\bar{e}_2 = 0$ である。