

第4回目の主題：集合の和集合や共通部分

まずは論理の復習

問題 4.1.  $\forall x > 0 (\exists y \in \mathbb{R} (x > y > 0))$  は真だろうか、偽だろうか。理由をつけて述べなさい。

問題 4.2.  $\exists y > 0 (\forall x \in \mathbb{R} (x > y > 0))$  は真だろうか、偽だろうか。理由をつけて述べなさい。

論理復習ここまで

集合の関係を論理で述べることもよくある。

問題 4.3.

$\forall x \in 5\mathbb{Z}$  にたいして  $(x \in 3\mathbb{Z})$  がなりたつ

は正しいだろうか?

集合と論理とは裏腹の関係にあるのであった。論理の  $\forall$  や  $\exists$  に対応する集合論的な概念も存在する。

定義 4.1. 正の整数の全体  $\mathbb{Z}_{>0}$  の一つ一つのエ  $n$  に対して集合  $S_n$  が与えられているとき、集合の列  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  が与えられているという。

同様に、集合  $\Lambda$  の一つ一つのエ  $\lambda$  に対して集合  $S_\lambda$  が与えられたとき、集合の族  $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が与えられたという。  $\Lambda$  のことをこの族の添字集合と呼ぶ。

もちろん集合列は集合族の特別な場合である。  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$  のことを  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  のように書いているのである。

定義 4.2. 集合族  $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  にたいして、その和集合と共通部分を

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda = \{x; \forall \lambda \in \Lambda \quad (x \in S_\lambda)\}$$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda = \{x; \exists \lambda \in \Lambda \quad (x \in S_\lambda)\}$$

により定義する。

集合列については、その共通部分

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} S_n$$

のことを

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$$

のごとく書くことも多い。和集合も同様。

問題 4.4.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$$

であることを示しなさい。右辺の記号は空集合といって、元をひとつも持たない集合のことをさす記号である。

問題 4.5.

$$\bigcap_{\epsilon > 0} (-\infty, 1 + \epsilon) = (-\infty, 1]$$

であることを示しなさい。(左辺は堅苦しく書けば  $\bigcap_{\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}} (-\infty, 1 + \epsilon)$  となるところであるが、上のように省略することが往々にしてある。)