論理と集合要約 NO.13

第13回目の主題：「代表元のとり方によらない」

問題 13.1. $\mathbb{Z}$ における二項関係を $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 6\mathbb{Z}$ で定義する。このとき、

(1) $\sim$ は同値関係であることを示しなさい。

(2) 以下この問題では、$x \in \mathbb{Z}$ の $\sim$ に関するクラスを $[x]$ と書く。1 のクラス $[1]$ に属する $\mathbb{Z}$ の元をすべて答えなさい。

(3) $\mathbb{Z}/\sim$ から $\mathbb{Z}$ への写像 f を、$f([x]) = (x$ を 3 で割った余り$)$ で定義できるだろうか。

(4) $\mathbb{Z}/\sim$ から $\mathbb{Z}$ への写像 f を、$f([x]) = (x$ を 4 で割った余り$)$ で定義できるだろうか。

上の問題の (3) のような状況は、「写像 f は 代表元のとり方によらずにうまく定義される」と呼ばれてとくに重宝される。

一般に、集合 X に同値関係 $\sim$ が定義されていて、X から 集合 Y への写像 f が、

$$\forall x \in X \forall y \in X (x \sim y \implies f(x) = f(y)$$

をみたすとき、$f(x)$ の値は x のクラス $[x]$ の**代表元のとり方によらない**という。このとき、あたらしい写像 $g : X(/\sim) \to Y$ が

$$g([x]) = f(x)$$

により定義できる。

問題 13.2. $\mathbb{Z}$ における二項関係を $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 12\mathbb{Z}$ で定義する。このとき、

(1) $\sim$ は同値関係であることを示しなさい。

(2) 以下この問題では、$x \in \mathbb{Z}$ の $\sim$ に関するクラスを $[x]$ と書く。3 のクラス $[3]$ に属する $\mathbb{Z}$ の元をすべて答えなさい。

(3) $\mathbb{Z}/\sim$ から $\mathbb{Z}$ への写像 f を、$f([x]) = (x$ を 5 で割った余り$)$ で定義できるだろうか。

(4) $\mathbb{Z}/\sim$ から $\mathbb{Z}$ への写像 f を、$f([x]) = (x$ を 4 で割った余り$)$ で定義できるだろうか。

つぎのことは集合の準同型定理とも呼ばれ、線形代数学、代数学などの各分野で基本的な役割を果たす。

命題 13.1. 写像 $f : X \to Y$ が与えられたとき、

(1) X に同値関係 $\sim_f$ が、

$$x_1 \sim_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

により定義される。

(2) $\bar{f} : (X/\sim_f) \to Y$ が

$$\bar{f}([x]_f) = f(x)$$

によりうまく定義される。ここに、$[x]_f$ は $\sim_f$ に関する $x \in X$ のクラスである。

(3) $\bar{f}$ は $X/\sim_f$ と $\mathrm{Image}\, f$ との間の全単射を与える。

(4) $\pi : X \to X/\sim$ を自然な射影とするとき、f は全射と単射の合成写像として分解される。すなわち、

$$f = \bar{f} \circ \pi.$$