

実数の全体は可算ではない

(対角線論法 1)

土基 善文

このスライドの主題

「実数をすべて番号づけて並べることはできない」

(0.9999 = 1.0000 のような、表記の不定性があるので、完全に理解するには微分積分学概論 AI の知識があったほうが良い。)

Go 数

Definition

x が Go-数 $\Leftrightarrow x = 0.????? \dots$ であり、? には 0 か 5 が
入る。

定理

Theorem

次のようなものがあつたとする。

1. 実数が1番目、2番目、3番目,... と並んでいる。
2. 並んでいる数字はすべて G_0 -数。

例えば、次のようなものである：

1 : 0.505050...

2 : 0.555555...

3 : 0.500500500...

4 : 0.550550550...

...

このとき、このリストには含まれない G_0 -数が必ず存在する。

定理の証明

Go 数のリストが与えられていたとする。

1 : 0.505050...

2 : 0.555555...

3 : 0.500500500...

4 : 0.550550550...

...

対角線を取り、その数の「裏目」ばかりを採用する。
0.0050... は上のリストには入らない。

発展

同様にして、 $[0, 1]$ の元を番号づけて並べることはできないことがわかる。

同様にして、 \mathbb{R} の元を番号づけて並べることはできないこともわかる。