

## 代数学演習 I 問題 NO.5

イデアルの例とイデアルによる剰余環 (2), 行列算編

問題 5.1.  $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$  の各元  $x$  に対して、その逆元を書きなさい。

問題 5.2. (各 1)  $R = \mathbb{Z}/112233\mathbb{Z}$  において、

- (1)  $R$  の元 2 の逆元を求めなさい。
- (2)  $R$  の元 5 の逆元を求めなさい。
- (3)  $R$  の元 756 の逆元を求めなさい。
- (4)  $R$  の元 4117 は逆元を持つだろうか?

環  $R$  に対して、その元を成分にもつ行列を考えることができ、通常の意味の和、差、積が(サイズがあっているという条件のもとで)定義されて、一年生で習う線形代数のかなりの部分がそのまま正しい。(割り算を伴う場合については注意が必要。)

$$M_n(R) = \{R \text{ の元を成分にもつ } n \times n \text{ 行列}\}$$

とおくと、これは(可換ではない)環である。その単位元は  $1_n$  ( $n$  次の単位行列)である。

問題 5.3.  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$  の元を成分にもつ行列の積

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

を計算し、できるだけ簡単な形、すなわち各成分の絶対値が 14 以下の整数によって表されている形になるように直しなさい。

問題 5.4.  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$  の元を要素にもつ行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

の逆行列を計算しなさい。

問題 5.5.  $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$  の元を要素にもつ行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

の逆行列を計算しなさい。

問題 5.6.  $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$  の元を要素にもつ行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

の逆行列を計算しなさい。

問題 5.7. 可換環  $R$  の元を成分にする  $m, n$  行列  $A$  と  $n, m$  行列  $B$  とにたいして、

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

が成り立つことを証明しなさい。

問題 5.8.  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$  の元を要素にもつ行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

の逆行列は存在するだろうか。行列式の乗法性

$$\det(X) \det(Y) = \det(XY)$$

に基づいて答えなさい。

問題 5.9. どんな整数  $n$  に対しても、

$$AB - BA = 1_n$$

をみたす行列  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  は存在しないことを示しなさい。(ヒント: トレース)

問題 5.10. 素数  $p$  について、 $A, B \in M_p(\mathbb{F}_p)$  で、

$$AB - BA = 1_p$$

を満たすものの例を挙げなさい。(かなり難問である。 $p = 3, 5$  のときにまず試してみると良いかも知れない。)

問題 5.11. 体  $K$  と素数  $q$ 、正の整数  $l$  が与えられているとする。このとき、群  $K^\times$  の元  $x$  の、 $K^\times$  の元としての位数 (=乗法的位数) が  $q^l$  の約数であるような元の全体は巡回群をなすことを示しなさい。

問題 5.12. 有限体  $K$  上の行列  $A \in M_n(K)$  が、 $M_n(K)$  の中で可逆なら、ある正の整数  $m$  について

$$A^m = 1_n \quad (\text{サイズ } n \text{ の単位行列})$$

が成り立つことを証明しなさい。