微分積分学基礎 NO.4 要約

今日のテーマ:**微分**

定義 4.1. 実数 a を含む区間上で定義された関数 f にたいして、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在するとき、f は a で微分可能であるという。極限 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ のことを $f'(a)$ と書き、f の a における微分係数と呼ぶ。

定義 4.2. (ランダウの記号) $\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=0$ のとき、f は g に比べて高位の無限小であるといい、“$f(x)=o(g)$ ($x\to a$ のとき)” と表記する。

例 4.3. Landau の記法で言えば連続性、微分可能性は次のように表現される。

(1) f が a で連続であることは、

$$f(x)=f(a)+o(1)$$

と同値である。

(2) f が a で微分可能であることは、ある定数 c に対して、

$$f(x)=f(a)+c(x-a)+o(x-a)$$

と同値である。

定義 4.4. f がある区間の各点で微分可能であるとき、関数 $x\mapsto f'(x)$ のことを f の導関数と呼ぶ。

例 4.5. 三角関数の加法定理、指数関数の指数法則、$e^x=1+x+o(x)$ を知識として仮定する。このとき、

(1) $\sin'=\cos$, $\cos'=-\sin$.
(2) $(e^x)'=e^x$.
(3) $(\log(x))'=\frac{1}{x}$