

微分積分学基礎 NO.7 要約

今日のテーマ:ロピタルの定理など

次のことが必要である。(先週やっておけばよかった...)

定理 7.1 (コーシーの平均値の定理). $[a, b]$ を含む开区間上で微分可能な関数 f, g が与えられているとし、 $g(b) \neq g(a)$ と仮定する。このとき、ある $c \in [a, b]$ が存在して、 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ を満たす。

証明のアイデア: $l = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ とおき、 $F(x) = \frac{1}{f}(x) - f(a) - l(g(x) - g(a))$ に平均値の定理を用いる。

本題はこちら:

定理 7.2 (ロピタル). 実数 a の近くで定義されて、微分可能な関数 f, g があるとする。このとき、極限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

が不定形であって、なおかつ極限

$$A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が存在するならば、前者の極限も存在して A と等しい。

◎ロピタルの定理は、 $\frac{\infty}{\infty}$ の形の極限や、 $a = \pm\infty$ のときの極限等でも同様のことが成り立つ。